10

GEOMETRYA

DLA

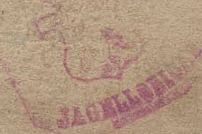
SZKOŁ NARODOWYCH.

CZĘSC II.

Cena oprawney w papier Zł.

W DRUKARNI NADWORNEY J.K. Mci
ROKU 1781.

~~Kazimierz ...~~



Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J.P. Lhuilier Obywatela Geneweńſkiego, w Towarzyſtwo Nauk w tymże Mieście uſtanowione policzonego, które za ogłoſzonym w Polſzcze, i obcych kraiach Uczonych do piſania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nadgrodę odebrało, od Towarzyſtwa do Kſiąg Elementarnych rozſtrząśnione, a przez J. X. Gawrońſkiego Kanonika Koadjutora KrakowſkiegoLektora, J.K. Mci i w tymże Towarzyſtwie zaſiadaiącego, na Polſki ięzyk z Francuſkiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepiſów naſzych podaiemy. w Warſzawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biſkup Wil. Prezy:
MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Biſkup Płocki.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliſki.
JĘDRZEY MOKRONOSKI Wwda Mazow:
JACEK MAŁACHOWSKI Podkan: Koro:
JOACHYM CHREPTOWICZ Podkan: W.X.L.
MICHAŁ MNISZECH Marſzałek Nadwor: Lit.
JGNACY POTOCKI Piſarz W.W.X.L.
ADAM Xżę CZARTORYSKI Gene: Ziem. Pod:
STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI Ge: Lieut. W.K.
FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerſki
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw: Or. Orła Biał:



ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY CZĘSCI GEOMETRYI.

ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych, użytych w tey Części Geometryi, z przydanemi o bok słowami Łacińſkiemi, toż ſamo w używaniu Matematyków znaczącemi.

Biegòn. *Polus*
Bryła. *Solidum.*
Bryłowatość. *Soliditas.*
Bytność. *Exiſtentia.*
Ciągło. *Continuè.*
Ciągły. *Continuus.*
Czworokątny. *Quadrangularis.*
Czworościan. *Tetraedrum.*
Dwòdzielny. *Subduplicatus*
Dwòmnożny. *Duplicatus.*
Dwòmnożyć. *Duplicare.*
Dwódzieſtościan. *Icoſaëdrum.*
Dwónaſtościan. *Dodecaëdrum*
Graniaſtoſłup. *Priſma*
Jednoimienny. *Ejusdem nominis*
Kąt płaſki. *Angulus planus*
Kąt bryłowy. *Angulus ſolidus*
Kloc. *Truncus*

Krawędz

Krawędź. *Arrête* (po Francuſku.)
Krzywy. *Curvus.*
Kula *Sphera.*
Kuliſty. *Sphericus.*
Nadmiar. *Exceſsus.*
Ośmiościan. *Octòédrum.*
Oſtroſłup albo Oſtrogran. *Pyramis.*
Oſtrokrąg. *Conus*
Oſtrokrąg ścięty. *Conus truncatus*
Płaſzczyzna *Planum.*
Początkowy. *Elementaris.*
Półkole. *Semicirculus.*
Półkula. *Hemiſpherium.*
Przecięcie. *Sectio.*
Rodzenie ſię. *Generatio*
Równik. *Æquator.*
Równoległoboczny. *Parallelogrammicus*
Równoległościan. *Parallelogrammum*
Rózległość. *Extenſio*
Sciana. *Paries*
Spodek. *Pes*
Stały. *Conſtans*
Sześcian. *Hexàédrum*
albo *Cubus*
Tròykątny. *Triangularis*
Tròymnożny. *Triplicatus*
Walec. *Cylinder*
Warſtwa. *Stratum*
Wielościan. *Polyedrum*
Wyczerpanie. *Exhauſtio*
Wymiar. *Dimenſio*
Wyrocznia. *Oraculum*

Prze-

Przeſtroga. Na Tablicy VI. Fig. 3. opuſzczone ſą litery, p, q, które wpiſać należy na końcach linii naybliżſzey równoodległey od linii PQ.

OMYŁKI DO POPRAWIENIA

Karta,	*Wierſz.*	*Stoi.*	*Popraw.*
18	3	(BD. (AC.	AC, BD.
27	-	*Fig.* 2.	*Fig.* 3.
57	19	be.	bc.
59	20	Doſt:	Doſtyczney
	22	Doſt.	Doſtawy
79	5	$1\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$.
100	przedoſtatni wierſz cały zmazać.		
108	5	GE.	GF.
-	7	GF.	GH.
-	25	Równoległobokow	Równoległoboku.
120	24	z ich	ich.
133	1	Które y	którey.
155	17	abc	aby
175	22	powierzchni	na powierzchni
188	7	ściętego	całego.
197	12	pośrodka	od środka
215	11	utworzony	utworzona
218	26	iaki	iak i
225	6	C : b.	B : b.
236	5	do powierzchni	do powierzchni podſtawy



CZĘSC DRUGA

O Bryłach.



WSTĘP,

W Części pierwszey samemi tylko zatrudnialiśmy się liniiami i powierzchniami; lubo iakażkolwiek *rozległość* (extensio) będzie rzeczy iakiey, nie iest ona ani samą liniią, ani samą powierzchnią, ale się rozciąga wzdłuż, w szerz i wgłąb. I tak, pokoy naprzykład, ma swoię długość, ma szerekość, i wysokość, czyli grubość. Tarcica, choćby nayciensza, ma także długość, szerokość i grubość. Nie byłoby powierzchni, tey tarcicy, to iest: nie byłoby rozległości iey, uważaney co do długości tylko, i szerokości, gdyby nie było

tarcicy uważaney co do wszystkich iey wymiarów. Powierzchnia ogranicza rozległość, i onę kończy; aby zaś granica iakiey rozległości była w samey rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powierzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak iak (mówiąc przez podobieństwo lubo dalekie) nie byłoby koloru naprzykład w suknie, gdyby nie było sukna.

Podobnym sposobem, lubo często nie uważaliśmy tylko długość iakiey rozległości (cośmy nazywali liniią) niemasz iednak tey długości, ieżeli niemasz powierzchni, którą ona kończy, lub na którey może być w rzeczy samey ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powierzchni; a że nie będzie powierzchni, ieżeli nie będzie rozległości maiącey trzy wymiary; więc i linii nie będzie, tylko tam, gdzie iest rozległość, z trzema wymiarami.

Gdy się kto bawi około rozległości, ile ta trzy wymiary w sobie zamyka, w takim razie mówi się, iż się bawi około *Ciała* (Corpus) albo *Bryły* (Solidum.)

Geome-

Geometrya nieuważa inaczey Ciała, tylko ile to rozciągnione ieſt w zdłuż, w ſzerz, i wzwyż albo w głąb; innemi zaś własnościami iego cale ſię nie zatrudnia, zoſtawuiąc ie do uważania Fizykom. Lubo zaś zdaie ſię, iż ſobie ściśle nader w uważaniu ciała założyli granice Geometrowie, maią ieduak obſzerne i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd ukrytych których wiadomość po więkſzey części koniecznie ieſt potrzebna chcącemu w Fizyce poſtąpić.

Nie ſami tylko Geometrowie, uważaiąc ciała, iednę ſobie w nich własność, to ieſt rozległość za cel wyſtawuią. Jeſt to, a przynaymniey być powinien, powſzechny poſtępowania ſpoſob, że gdy kto rzecz iaką z gruntu chce poznać, i poiąć; po części nayprzod iey własności uważa, a dopiero łączy ie razem, i dokładnieyſzey o rzeczy całey nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto ieſt ograniczony, aby wiele poſpołem nieznanych ieſzcze własności mogł dochodzić, a tym bardziey ie ogarnąć.

Skutek takowego własności rzeczy z oſobna dochodzenia, tym więkſzey ieſt wagi, im więcey rzeczom taż własność

ſność ſłużyć będzie; a taką własnością ieſt rozległość. Cokolwiek pod zmyſły naſze podpada i podpadać może, wſzyſtko to ieſt rozległym; cokolwiek więc odkryie tym ſposobem Geometra, może to do wſzyſtkich rzeczy przyſtoſować, które tylko pod zmyſły naſze podpadaią, lub im poddane być mogą. A ztąd ſię okazuie ważność w wynalazkach Geometrycznych, i obſitość w przyſtoſowaniu onychże.

Lubo maiąc wzgląd na ſłabość poięcia ludzkiego, iednę tylko własność ciała uważa Geometra, dla większey iednak wygody i tę ieſzcze dzieli nieiako na części, i w myśli ie oſobno ſtawia, chociaż w rzeczy ſamey oſobno ſię nie znayduią. Nie ma względu rolnik na grubość ziemi w tym mieyſcu, gdzie rolą ſwoię uprawia. Dosyć mu natym, że ta grubość ieſt doſtateczna do przyięcia ziarna, do doſtarczania ſoku i do rozwinienia ſię tegoż ziarna. Wielkość pola znać oſobliwiey ſtara ſię, aby wiedział, ile na nim ziarna poſiać może, a zatym powierzchnią ſwego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i piſzący, miarkuie wielkość powierzchni papieru, końcem zmieſzczenia na nim tego,

co ma pisać: nie wchodząc w iego grubość, i dosyć maiąc na tym, że mu atramentu nie przebiia.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego, wszelako iednak, ciało to, dwie strony odmienne, przeciwne sobie mieć musi, i iedna z nich odłączyć się w rzeczy samey może od drugiey, luboby nie znalazło się sposobne narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc chociaż nayciensze, nie może być za iedno brane, co powierzchnia; a zatym nie prawdziwie rzecz wykładaią nie którzy Geometrowie. gdy mowią: że ciało albo bryła składa się z powierzchni położonych iednych na drugich; bo iakażkolwiek byłaby liczba tych warst, z których ciało złożone uważamy, każda iednak wszczególności ta warsta byłaby bryłą, a nie powierzchnią, ponieważ miałaby dwie strony przeciwne, i mogące się od siebie odłączyć.

Co się zaś powiedziało o powierzchniach, to i o liniiach, twierdzić należy; że nie dla tego są od Geometrów uważane, iakoby w rzeczy samey znaydowały się, ale tylko dla łatwości i wygody,

dy. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak ſzeroka ieſt droga, którą ma przebyć, dosyć mu na tym, iż ſię nią udać może. Liczba kroków, które ma czynić nie zawiſła od ſzerokości, ale od ſamey długości tey drogi; tę przeto długość ſzczegulniey uważa.

Niechby była bardzo mała ſzerokość powierzchni iakiey, naprzykład Równoległoboku, i niechby ta ſama tak mała ſzerokość podzielona była na iak naywięcey części, przez liniie równoodległe od długości, wſzelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak naymnieyſza była odległość dwóch liniy, które tę ſzczupłą powierzchnią kończą, za iednę iednak liniią wziąść ich nie można; a ztąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie ieſt niedokładne a bardziey ieſzcze fałſzywe, że powierzchnia ſkłada ſię z liniy położonych iednych przy drugich.

Nakoniec zdarzaią ſię przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całey linii, ale koniec iey tylko ieden, lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi ſię, że Geometra ſamym ſię zatru-

trudnia *punktem*. Punktu w ſamey iſtocie niemaſz, ieżeli niemaſz linii, którą punkt kończy, albo iey części, które oddziela. Podróżny cel ſwoiey drogi, iak punkt iaki ſobie wyſtawia, wielkością iego całe ſię nie zaprzątaiąc, aż poki do niego nie doydzie, doſzedłſzy, uważa dopiero obſzerność mieyſca, do którego dążył. Niemaſz wierzchołka kąta, ieżeli nie będzie dwóch liniy ten kąt czyniących. Uwagi nad któremi ſię zaſtanawia Geometra czyli to, co do położenia punktów iednych względem drugich, czyli względem linii iakiey, pochodzą z ſamego wyſtawienia ſobie w myśli tych rzeczy w iſtocie ſię nie znayduiących, dla łatwieyſzego doyścia tego, czego ſzuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względem zmyſłów naſzych, lub względem wielkości ciał, które nam nayczęściey pod zmyſły podpadaią: wſzelako można oddalić myślą tę małość względem innych więkſzych rzeczy, i uważać ciało choćby też naymnieyſze, iak gdyby wielkim bardzo było, a to względem tyſiączney naprzykład części ſwoiey.

Niech będzie iak naymnieyſza liniia. tey linii koniec ieden, zawſze różnić ſię bę-

będzie od drugiego. J znowu niechby kto na iak naywięcey części podzielił iaką liniią, każda z tych części dwa końce odmienne mieć będzie, a ztąd poznać można, iak nie prawdziwe ieft to wyrażenie; że liniia fkłada się z punktów przy sobie położonych.

Wyftawuiąc sobie Geometra pod temi różnemi poftaciami rozległość, uprzedzać tym famym zdaie się te trudności, które częfto zwykły bywać zarzucane o prawdziwey *bytności* (exiftentia) tych rzeczy, które są celem iego nauki.

Powierzchnia płafka, ieft powierzchnią, na którey ku wfzyftkim ftronom liniie profte prowadzić można: i takiemi to liniiami i powierzchniami dotąd zatrudnialiśmy się, których wfzyftkie części na teyże famey *Płafzczyznie* zoftaią (in eodem Plano). W części naftępuiącey takie nadto liniie i powierzchnie zabawiać nas będą, które na odmiennych płafzczyznach znayduią się.

Z dwoiakiemi liniiami mieliśmy ieszcze do czynienia, z proftemi i z kołowemi, lub ich częściami. Powierzchnie także, około których bawiliśmy się,

były

były albo zakończone liniiami proftemi, albo liniią kołową, albo liniiami pròftemi, i częściami liniy kołowych. W części następuiącey będziemy nadto zabawiać się różnemi powierzchniami *krzywemi* (curva) które wyftawić fobie można iak gdyby początek miały z obrotu powierzchni płafkich, które iużeśmy roftrząfali. Obaczemy to w fzczegulności, gdy o każdey takiey powierzchni mowa będzie.

Co fię zaś tycze *Brył*; te dwoiakiego gatunku zabawiać nas będą; iedne, które fą zakończone powierzchniami płafkiemi, drugie, które fię kończą powierzchniami krzywemi albo częścią krzywemi, częścią płafkiemi.

Geometrya więc, ieft to nauka, która fię zabawia famą rozległością.

Liniie profte dwoiakośmy uważali, raz co do ich wielkości, drugi raz co do ich położenia iednych względem drugich. W pierwfzym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo profto zaraz, albo przez fpolną im miarę, do którey ftofowaliśmy każdą z ofobna liniią. W drugim względzie, albo liniie

z fobą

z sobą się spotykały, i ztąd początek kątów, i ich podziałów; albo się też nie spotykały.

Nauczyliśmy się dawać linii iedney względem drugiey iakiekolwiek do upodobania położenie: to iest robić kąt iakikolwiek dany, lub pociągnąć równoodległą od linii daney. Wyznaczyliśmy mieysce wierzchołków, kątów iakichkolwiek danych, których ramiona przechodzą przez dwa punkta dane, i wiele ztąd użytecznych używań wywiedliśmy. Nie mogąc zaś dokładnie wyznaczyć stosunku okręgu koła do linii prostey, przybliżyliśmy iak naybardziey stosunek ten do prawdziwego. Widzieliśmy oraz, że porównanie okręgów iednych do drugich, nie zawisło od porównania okręgu z liniią.

Co do powierzchni; przytoczyliśmy nayprzód przypadki, w których dwie figury mogą przystać do siebię. Widzieliśmy, że to przystawanie zawisło iedynie od wielkości i położenia liniy iednych względem drugich, to iest, że tylko takie dwie figury przystać mogą do siebie, w których boki iednakowey są wielkości iedne względem drugich, i

iedna-

iednakowego położenia. Jednym z nayznamienitſzych przyſtoſowań było przenieſienie, czyli przeryſowanie iakieykolwiek figury proſtokreślney. Widzieliśmy także, iż wielkość figur proſtokreślnych nie zawiſła od wielkości i położenia ich boków, gdyż Troykąty, lub Równoległoboki, byleby iednakowe miały podſtawy, i wyſokości, ſą równe; równe też będą, tak dwa naprzykład Troykąty, iako i dwa Równoległoboki, gdy ich podſtawy będą w ſtoſunku odwrótnym ich wyſokości; Nadto równość w wielkości figur nie tylko nie zawiſła od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby; ponieważ Tróykąt, Równoległobok, i kwadrat może być tak zrobiony, że ſię równać będzie iakieykolwiek figurze daney proſtokreślney; może ieſzcze zrównany być z ſummą lub różnicą figur innych proſtokreślnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą iaką proſtokreślną, i zryſować takie koło, któreby mało co różniło ſię od iedney lub więcey figur proſtokreśnych; dokładnie zaś można mieć koło równe innemu danemu, lub wielu innym kołom także danym.

Lubo

Łubo wielkość figury nie iest tym samym wyznaczona, że wyznaczony iest iey obwód i położenie boków; podany iednak mieliśmy sposób ieden z naywygodnieyszych, wykryślenia figury prostokreślney o iłukolwiek bokach danych, maiąc dany iey obwód, widzieliśmy oraz granice, w których przy nie powiększonym obwodzie, powierzchnia figury być może powiększona; łubo zmnieyszenia iey nie ma żadnych granic.

Z podobieństwa położenia liniy, które kończą figurę, i z proporcyonalności tychże liniy wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wniosków, i przystosowań. Szczegulniey zaś wynikało, przeniesienie na papier, działań na ziemi częstokroć nierówney odprawionych; które to przeniesienie dokładnieyszym i łatwieyszym ieszcze stawało się, używszy rachunku.

W tym wszystkim, co się dotąd mówiło, nie wspomniało się tylko o linii prostey, i o linii kołowey, o powierzchniach płaskich zakończonych przez liniie proste, albo przez liniie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaskiemi, albo krzywemi

wemi, maiącemi swoy początek od powierzchni płaskich, Ta część Geometryi, nazywa się *Geometryą początkową* (Geometria Elementaris) służy ona za fundament koniecznie potrzebny do innych części zawilszych, z ktòryeh się składa *Geometrya wyższa*; (Geometria sublimis), a w tey rzecz iest o rozmaitych innych liniiach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czasem można, a czasem nie można wyprowadzić z tych ostatnich liniy krżywych, lub z powierzchni niemi zakończonych.

Różni się też Geometrya początkowa od wyższey, i co do sposobu rysowania figur do niey należących; w Geometryi albowiem początkowey, dosyć iest na cerklu i linii do wykreślenia figur iey własnych; każde przeto zagadnienie, ktòre z pomocą tych dwòch tylko narzędziów może być rozwiązane, do niey należy. Jeżeli zaś zagadnienie, mogąc być rozwiązanym, z pomocą samey linii i cerkla, to iest przez same linie i łuki koła, rozwięzuie się z użyciem innych ieszcze narzędziów, albo liniy krzywych, odmiennych od koła, o tako-

takowym rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie iest wykonane sposobem zadosyć czyniącym.

ROZDZIAŁ I.

O położeniu tak Liniy iako i Płaszczyzn iednych względem drugich.

1. *TWierdz:* 1. Gdy liniia ma dwa swoie punkta, na iedney płaszczyznie, ma ie oraz i wszystkie na teyże płaszczyznie.

Dowodz: Liniia prosta wyznacza się przez dwa punkta; a zatym liniia prosta poprowadzona przez dwa punkta dane, na daney także płaszczyznie zniydzie się z każdą inną prostą, przez też dwa punkta poprowadzoną, i iednę z nią liniią uczyni.

2. *Twierdz.* Przez liniią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedna płaszczyzna.

Dowodz Wystawmy sobie myślą, iż przez tę liniią przechodzi iakakolwiek płaszczyzna; niechay ta płaszczyzna obraca

braca ſię około teyże linii, w tym obrocie przeydzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą ſamą płaſzczyzną, którey ſzukamy.

Można także i przez dwie liniie przecinaiące ſię (a) przeprowadzić płaſzczyznę; ponieważ płaſzczyzna przechodząca przez iednę z tych liniy i przez ktòrykolwiek punkt drugiey, przechodzi razem i przez przecięcie tych dwóch liniy, i przez punkt należący do drugiey linii, a zatym i druga ta liniia cała ieſt na teyże płaſzczyznie.

Można nakoniec i przez trzy boki Tróykąta przeprowadzić płaſzczyznę. Jakoż płaſzczyzna przechodząca przez dwa boki Tróykąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecia

---

(a) *Mówię*. przecinaiące ſię, *bo wiele ieſt liniy, których położenie jeſt takie, że przez nie nie może razem przechodzić iedna płaſzczyzna; na przykład w koſtce od grania, tak ieſt położone ramie iedno kąta, na iedney ſtronie, i bok przeciwny drugiemu ramieniu tegoż kąta. na inney ſtronie, że przez te dwie linie, iedna płaszczyzna przechodzić nie może.*

cina tamte dwa, a zatym i ten trzeci bok na teyże iest płaszczyznie.

3. *Twierdz.* 3. Gdy się dwie płaszczyzny przecinaią, tym spólnym ich przecięciem, iest liniia prosta.

Dowodz. Weźmy na tym spólnym przecięciu dwa iakiekolwiek punkta, i poprowadźmy przez nie, na iedney z dwóch płaszczyznie, liniią prostą; ta liniia będzie miała na drugiey płaszczyznie dwa punkta do siebie należące, więc i cała będzie na teyże drugiey płaszczyznie; a zatym będzie cała na obydwóch płaszczyznach, to iest będzie spolnym ich przecięciem.

To co się o płaszczyznach powiedziało, można porównać z tym, co się linii tycze; to iest: liniia prosta wyznacza się przez dwa punkta, płaszczyzna wyznacza się przez trzy punkta lub przez dwie liniie przecinaiące się. Gdy znowu dwie liniie wzaiem się przecinaią, punkt spólnym ich iest przecięciem; gdy zaś przecinaią się dwie płaszczyzny, spolnym ich przecięciem iest liniia prosta.

4. *Twierdz.* 4. Gdy liniia prosta do dwóch innych, które się przecinaią na

iedney

iedney płaſzczyznie, proſtopadłą ieſt w punkcie ich przecięcia, będzie też proſtopadłą i do każdey inney linii, przechodzącey przez ten punkt na teyże płaſzczyznie.

Można to nayprzod obiaśnić na karcie przełamaney. Liniia proſta, podług którey karta ſię przełamała, proſtopadłą ieſt do boków, cześci dwóch, tey karty przełamaney. Obracaiąc część iednę złamaną, około złamania, czyli ſpólnego przecięcia, bok ieden z dwóch, do którego liniia przecięcia była proſtopadłą, odmieniać będzie położenie, wſzelako iednak, na iedney zoſtanie płaszczyznie, i liniia przecięcia zawſze do niego będzie proſtopadłą. Ten przykład prawdę tę zmyſłom dosyć ukazuie, nie dosyć iednak ukazuie ią rozumowi.

Dowodz. Niech będą dwie linii proſte, AB, CD, przecinaiące ſię w P, i niech do obydwóch proſtopadłą będzie liniia SP. Na płaſzczyznie przechodzącey przez te dwie linii, przeciągnąwſzy przez punkt P. iakązkolwiek liniią EF, do tey linii będzie też proſtopadłą liniia SP. *Tab. I. Fig. 1.*

Weźmy liniie równe: PA, PB, i znowu PC, PD, także równe. Poprowadźmy BD spotykaiące liniią EF, w punktach AC, E, i F.

Ponieważ Tróykąty: APC, BPD, maią dwa boki równe iedne względem drugich, i kąty między temi bokami zawarte, także równe, więc mogą przystać do siebie; a w szczególności kąt PAC, równy iest kątowi PBD. Przeto i Tróykąty APE, BPF iako maiące równe boki: PA, PB, i kąty równe iedne względem drugich, mogą też do siebie przystać, a wszczegulności, równe są w nich boki PE, PF, i AE, BF.

Pociągniymy ieszcze liniie SA, SB, SC, SD; Tróykąty prostokątne SPA, SPB, maią bok spolny SP, i boki PA, PB, równe; a zatym mogą do siebie przystać, a w szczegulności liniie SA, SB, są równe. Podobnie równe są i liniie SC, SD. Dwa więc Tróykąty CSA, BSD, których boki wszystkie równe są iedne względem drugich, mogą do siebie przystać, a wszezegulnoćci kąty SAC, SBD są równe.

Poprowadziwszy SE, SF; Tróykąty: SAE, SBF maią boki SA, AE, równe

wzglę-

względem boków SB, BF, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać; a wszczególności równe są liniie, SE, SF.

Więc w Tróykątach SPE, SPF, równe są boki w iednym, względem boków drugiego, azatym i te przystać mogą do siebie; a wszczególności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległemi, czynią razem dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątem prostym; a zatym liniia SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To Twiedzenie bardziey w dowodzeniu długie niż trudne, powinno być obiaśnionym przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna, i z nici; lub w inny sposob. Toż rozumieć trzeba i względem wszystkich prawie podań, w tey części zawartych.

5. *Defin:* Gdy liniia prostopadłą iest do wszystkich innych, które się w punkcie iey spadku przecinaią na płaszczyznie iakiey, o takiey linii mówi się, że iest prostopadłą do tey płaszczyzny; a zatym ieżeli liniia prostopadłą iest do

dwóch innych w punkcie ich przecięcia, na płaſzczyznie, ta liniia proſtopadłą ieſt i do tey płaſzcyzny.

6. *Twierdz:* 5. *Wzaiemnie*, ieżeli liniia, proſtopadłą ieſt do trzech innych liniy, które ſię w iednym iey puncie przecinaią; płaſzczyzna ta, która przechodzi przez dwie z tych trzech linii przechodzi też i przez trzecią.

Tab. I. Fig. 1, Niech będzie liniia SP. proſtopadłą do linii PB, PD, PF, które przechodzą przez tenże ſam punkt P, linii SP.

Niechay płaſzczyzna iaka przechodzi przez liniią SP, i PF. Jakażkolwiek będzie liniia, w którey ta płaſzczyzna, przecina drugą płaſzczyznę przechodzącą przez liniie PB, i PD, wſzelako liniia SP będzie proſtopadłą do tego ſpolnego przecięcia, a zatym gdyby liniia PF, nie była tym ſpólnym przecięciem, tedy liniia SP, byłaby proſtopadłą do dwóch linii leżących na teyże co i ona płaſzczyznie, to ieſt; byłaby proſtopadłą do linii PF, i do drugiey ieſzcze linii różney od PF przecinaiącey ſpolnie dwie płaſzczyzny; co być nie może. Liniia więc PF. nie ieſt różna od ſpolnego przecięcia dwòch płaſzczyzn SPF, BPD, a zatym ieſt tym ſpol-

ſpolnym przecięciem, i przeto należy i do drugiey płaſzczyzny BPD; to ieſt ta płaſzczyzna BPD przechodząca przez liniie PB, PD, przechodzi też i przez liniią PF.

7. *Twierdz:* 6. Dwie liniie proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, ſą od ſiebie równoodległe. *Tab. I.*

Niech będą dwie liniie BA, CD proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, na którą ſpadaią w punktach B, i C, te dwie liniie ſo równoodległe. *Fig. 2.*

Poprowadźmy liniią BC, a od końca C ſpolnego linii BC, z liniią DC, proſtopadłą do płaſzczyzny, wyciągniymy na tey płaſzczyznie proſtopadłą CE, do BC, równą iakieykolwiek długości BA, wziętey na drugiey linii proſtopadłey do teyże płaſzczyzny. Poprowadźmy ieſzcze i liniie BE, AE. Dwa Tróykąty ABC, ECB, maią ſpólny bok BC, boki także BA, CE, równe, z wykryślenia, i kąty proſte: ABC, BCE; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności liniie BE, AC, ſą równe. Dwa tedy Tróykąty ABE, ECA maią względem ſiebie równe wſzyſtkie boki,

aza-

a zatym przystać mogą do siebie; a w szczegulności równe są kąty ABE, ACE; że zaś liniia AB, prostopadłą iest do linii BE, (ponieważ wzieliśmy ią za prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey przez liniie BC, BE) więc kąt ACE, iest też prosty; a zatym liniia EC prostopadła do dwóch liniy CB, CD, z wykryślenia, iest też prostopadłą i do linii CA. Przeto ta liniia CA iest na tey samey płaszczyznie, co i liniie BC, CD. Aże płaszczyzna przechodząca przez liniie AC, CB, przechodzi też i przez liniią AB, więc liniie AB, CD, są na iedney płaszczyznie; będąc zaś na iedney płaszczyznie, że są prostopadłemi do linii BC, więc od siebie równoodległemi będą.

Przestroga Aby łatwiey zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przegiąć Figurę 2, w linii BC; tak, aby część iedna ABCD tey Figury, przypadała prosto nad drugą częścią BEC. Podobnie dopomagać można łatwieyszemu wyobrażeniu i w innych Figurach, gdzie nie iedna zachodzi płaszczyzna.

Uwaga W pierwszey części cokolwiek się mówiło o liniiach równoodległych, zawsze to było w tym rozumieniu, że te liniie kreślone były, na tey samey

ſamey płaſzczyznie, na ktòrey i każda inna liniia łącząca dwa ich punkta, leżała.

8, *Twiedz*: 7. Jeżeli dwie liniie ſą od ſiebie równoodległemi, a iedna z nich proſtopadłą ieſt do iakiey płaſzczyzny, będzie idruga do teyże płaſzczyzny proſtopadłą.

Weźmy dwie liniie BA, CD za równoodległe; eżeli iedna z nich nap: CD, ieſt proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, będzie do teyże płaſzyzny proſtopadłą i druga BA. *Tab. I. Fig. 2*

Na płaſzczyznie, do którey wzieliśmy za proſtopadłą, CD, pociągniymy CB; będą do CB, proſtopadłemi obiedwie liniie AB, i CD. Na teyże płaſzczyznie niech będzie CE proſtopadłą do BC, i równą długości BA. Poprowadźmy ieſzcze AC, AE, BE. Całe dowodzenie na tym zawiſło, aby okazać, że kąt ABE ieſt proſtym, to ieſt, że liniia AB proſtopadła do linii BC, ieſt razem proſtopadłą i do linii BE, leżącey na tey ſamey płaſzczyznie, do którey liniia CD ieſt proſtopadłą.

Dwa Tróykąty proſtokątne ABC, ECB maią ramiona kąta proſtego równe iedne

dne względem drugich; a zatym te dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, a w szczegulności liniie AC, BE, są równe. Maią tedy dwa Tróykąty ABE, ECA, wszystkie trzy boki równe iedne względem drugich, i mogą zatym przystać do siebie; a wszczegulności równe są kąty ABE, ACE. Płaszczyzna przechodząca przez dwie liniie równoodległe AB, CD, przechodzi też tak przez liniią BC, iako i przez AC, więc liniie DC, BC, AC, na iedney płaszczyznie leżą. A że liniia CE iest prostopadłą do dwóch linii CD, BC; będzie też prostopadłą i do trzeciey linii CA; a zatym kąt ACE iest prostym; a że ten kąt, iest równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, iest prostym.

Tab. I. 9. *Zagad:* Spuścić prostopadłą do płascczyzny, z punktu nie na niey danego.

Fig. 3. Niech będzie taki punkt S, z którego spuścić trzeba prostopadłą na daną płaszczyznę.

Rozwiązanie. Na płaszczyznie daney nakreślmy iakąkolwiek liniią AB. Niech przez tę liniią i przez punkt dany S, przechodzi inna płaszyzna, na którey pociągniy-

ciągniymy SD, proſtopadłą do AB. Na daney płaſzczyznie niech też będzie poprowadzona DP, proſtopadła do AB; a przez linije SD, DP, niech przechodzi płaſzczyzna, na którey niech będzie SP proſtopadłą do linii DP; ta liniia SP będzie razem proſtopadłą, którey ſzukaliśmy.

Wykreślenie ſłużące do dowodzenia. Niech przez P, przechodzi liniia EF, równoodległa od AB.

Dowodz: Liniie SD, PD, z wykreślenia ſą proſtopadłe do linii AB; więc liniia DB, wzaiemnie ieſt do obydwóch tych liniy proſtopadłą; a zatym proſtopadłą ieſt i do płaſzczyzny przechodzącey, przez te dwie liniie. Aże liniia EF równoodległą ieſt od linii AB, więc liniia EF ieſt też proſtopadłą do teyże płaſzczyzny SDP; a wſzczególności proſtopadłą ieſt do linii SP; i liniia SP, ieſt wzaiemnie do linii EF proſtopadłą. Ze zaś liniia SP zrobiona była proſtopadłą do linii PD, więc liniia SP ieſt razem proſtopadłą do linii EF, i PD, które ſię przy iey ſpadku P, przecinaią na daney płaſzczyznie, a zatym liniia SP, proſtopadłą ieſt do teyże płaſzczyzny.

10.

10. *Zagadn:* 2. Od punktu danego na płaszczyznie wynieść prostopadłą do teyże płaszczyżny.

Rozwiąz: Spuśćmy do płaszczyzny daney z punktu iakiegokolwiek nie na niey będącego, prostopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoodległą od teyże prostopadłey.

11, *Uwaga* 1. Od punktu danego, iednę tylko prowadzić można prostopadłą, do płaszczyzny.

12. *Uwaga.* 2. Gdy liniia iaka nie iest ani na samey p łaszczyznie, ani do niey prostopadłą; może być albo od niey równoodległą, albo tak, iak zechcemy do niey nachyloną.

Nayprzod. Jeżeli, spuściwszy z dwóch punktów linii iakiey, dwie prostopadłe na płaszczyznę, te prostopadłe będą sobie równe; tedy ta liniia od którey są spuszczone, będzie równoodległa od płaszczyzny, na którą ie spuścilismy, to iest: nie spotka nigdzie tey płaszczyzny, choćby tak liniia, iako i płaszczyzna naydaley były przedłużone.

Powtore

Powtore. Niech będzie liniia SD. nie proſtopadłą do płaſzczyzny; ale niech ſpotyka płaſzczyznę w punkcie naprz: D. Z punktu któregokolwiek tey linii naprz: z S, ſpuśćmy do tey płaſzczyzny proſtopadłą natrafiaiącą na nię w punkcie P, i poprowadźmy PD. Kąt SDP, nazywa ſię kątem *pochyłości* (angulus inclinationis) tey liniy SD, do płaſzczyzny. *Tab. I. Fig. 2.*

Ten kąt ieſt naymnieyſzym z tych wſzyſtkich, które czynić może liniia SD, z iakąkolwiek inną liniią poprowadzoną na tey płaſzczyznie, przez punkt D, i gdyby z punktu P, iako ze środka promieniem równym linii PD, nakryślony był okrąg koła, wſzyſtkie liniie ciągnione od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniłyby iednakowy zawſze kąt z tą płaſzczyzną.

Ponieważ te podania ſą tylko do innych głownieyſzych *pomocnicze* (ſubſidiariæ) i łatwe do dowiedzenia, przestaie ſię tu na ſamym ich wyrażeniu.

13. *Twierdz:* 8. *Gdy dwie liniie równoodległe ſą od trzeciey, która na odmienney od nich leży płaſzczyznie; te*

dwie

dwie liniie i od siebie równoodległe będą.

Tab: I. Fig: 4. Niech będą dwie liniie AB, CD, równoodległe od linii EF, będą te dwie liniie i od siebie równoodległemi. Od punktu którego kolwiek na linii EF, naprz: G, wyciągniymy dwie do tey lini prostopadłe: GH GI, na płaszczyznach przechodzących przez tęż liniią EF, i przez AB, i CD. Ponieważ liniia EF, iest prostopadłą, tak do lini GH, iako i do linii GI, więc też będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey przez te dwie liniie. A że znowu dwie liniie AB, CB są równoodległe od linii EF, więc są obiedwie prostopadłe do płaszczyzny przechodzącey przez liniie GH, GI, a zatym są od siebie równoodległe.

14. *Twierdz:* 9. Gdy dwie liniie, które się przecinaią są równoodległe względem dwóch drugich, które się także przecinaią, kąt zawarty między dwiema pierwszemi liniami, równy będzie kątowi zawartemu między dwiema drugiemi.

Tab: I. Fig: 5. Niech będą dwie liniie AB, AC, równoodległe względem dwóch drugich DE,

DE, DF; kąt BAC zawarty między dwiema pierwszemi, równy iest kątowi EDF zawartemu między dwiema drugiemi.

Weźmy równe liniie AB, DE, i równe t kże liniie AC, DF. Pociągniymy liniie AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ linie AB, ED, sa równe, i równoodległe, Czworokąt ABED będzie oraz Równoległobokiem, i liniie też AD, BE, bądą równemi, i równoodległemi.

Podobnie równe są i równoodległe liniie AD, CF; więc liniie BE, CF są też równe, i równoodległe, względem linii AD; a zatym równe są sobie, i od siebie równoodległe. Jest tedy Czworokąt BEFC, oraz Równoległobokiem, a w szczególności równe są liniie BC, EF. Przeto Tróykąty BAC, EDF, boki trzy równe maią, iedne względem drugich, a zatym przystać mogą do siebie, a w szczególności równe są kąty BAC, EDF.

15. *Przystosowanie.* Niech będą dwie płaszczyzny, które się przecinaią. Na każdey z tych płaszczyznie wystawmy prostopadłą, do spolnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu któregokolwiek

wiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiema temi proſtopadłemi, iednakowy zawſze będzie, chociaż coraz inny na ſpolnym przecięciu punkt wybierać będziemy, do wyprowadzenia z niego tych proſtopadłych.

Defin: Jeſt przeto taki kąt zdatnym do wymierzenia pochyłości tych dwóch płaſzczyzn iedney względem drugiey. Gdy zatym kąt zawarty między temi dwiema proſtopadłemi, ieſt proſty, mówi ſię, że w takim razie *płaſzczyzna iedna ieſt proſtopadłą do drugiey.* Gdyby zaś kąt między temi dwiema proſtopadłemi zawarty, miał: 10°, 20°, 30° i t. d. w tym razie i dwie płaſzyzny zawierałyby kąty: 10°, 20° 30°, i t. d.

Można ieſzcze i w inny ſpoſob, przeświadczyć ſię iako pochyłość dwóch proſtopadłych, wyciągnionych na dwóch płaſzczyznach, od iednego punktu linii przecięcia ſpolnego tych płaſzczyzn, odpowiada zawſze pochyłości tychże dwóch płaſzczyn. Wyſtawmy albowiem ſobie te dwie płaſzczyzny przyſtaiące do ſiebie, i leżące iedna na drugiey. Niech potym ſpodnia płaſzczyzna zoſtanie na ſwoim mieyſcu,

a wy-

a wyżſza niech ſię podnoſi, i obraca około ſpólnego przecięcia. Spolne przecięcie, podczas tego obrotu będzie zawſze proſtopadłe, do dwóch liniy proſtopadłych wyciągnionych na obydwóch płaſzczyznach, od iednego punktu; a zatym te dwie proſtopadłe zoſtaiące zawſze każda na ſwoiey płaſzczyznie, odpowiadać będą podczas tego obrotu, pochyłości dwóch płaſzczyzn. Gdy naprz: płaſzczyzna ruchoma, obieży połowę drogi, którą iey obeyść trzeba, aby ſię znalazła na drugiey ſtronie, w równi z płaſzyzną ruchomą, w ten czas i proſtopadła do ſpolnego przecięcia, znayduiąca ſię na płaſzczyznie ruchomey obieży połowę tey drogi, którą ma obeyść, aby ſię w iedney równi ſtykała końcem ſwoim z drugą liniią proſtopadłą, do ſpolnego przecięcia wyciągnioną na płaſzczyznie nieruchomey. Toż mówić i o innych częściach tego obrotu.

16. *Twierdz:* 10. Gdy iaka proſta liniia proſtopadłą ieſt do płaſzyzny, do teyże płaſzczyzny proſtopadłą będzie każda inna płaſzczyzna przez tę liniią przechodząca.

Niech

Tab: I. Fig: 6. Niech będzie liniia GP, proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, i niech przez tę liniią GP, przechodzi inna iakakolwiek płaſzczyzna; ta proſtopadłą będzie do pierwſzey płaſzczyzny.

Niech liniia AB, będzie ſpolnym tych dwóch płaſzczyzn przecięciem; od punktu P, przez pierwſzą płaſzczyznę wyciągniymy PC, proſtopadłą do tego ſpolnego przecięcia.

Ponieważ liniią GP, wzieliśmy za proſtopadłą do pierwſzey płaſzczyzny, więc GP proſtopadłą będzie tak do linii, AB, iako i do linii PC; bo te dwie liniie przechodzą przez pierwſzą płaſzczyznę; a zatym od punktu któregokolwiek nap: P. znayduiącego ſię na ſpolnym przecięciu dwóch tych płaſzczyzn, wyciągnowſzy, proſtopadłe PG, PC, do tegoż ſpolnego przecięcia, te liniie będą proſtopadłe iedna do drugiey; a ztąd proſtopadłe będą do ſiebie i te dwie płaſzczyzny.

17. *Wnioſek*. Gdy liniia iaka proſtopadłą ieſt do płaſzczyzny, a na teyże płaſzczyznie pociągniemy iakąkolwiek inną liniią, i do tey ſpuściemy drugą proſtopadłą

ſtopadłą od ſpodku pierwſzey proſtopadłey; poprowadziwſzy potym od któregokolwiek punktu pierwſzey proſtopadłey, liniią do punktu, w którym druga proſt opadła ſpotyka liniią pociągnioną na płaſzczyznie; ta oſtatnia liniia poprowadzona, proſtopadłą będzie do linii na płaſzczyznie pociągnioney.

Niech będzie SP, proſtopadłą do płaſzczyzny; pociągnyimy na teyże płaſzczyznie liniią AB, i ſpuśćmy do niey proſtopadłą PD od ſpodku P, linii SP. Poprowadziwſzy z punktu któregokolwiek, naprz: S, linii proſtopadłey SP, liniią SD, do punktu D, w którym proſtopadła PD ſpotyka liniią AB, ta liniia SD, będzie proſtopadłą do AB. *Tab: I. Fig: 3.*

Przez punkt P, przeciągniymy EF równoodległą od AB.

Ponieważ liniia SP proſtopadłą ieſt do płaſzczyzny, daney, będzie też proſtopadłą i do EF znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie; a wzaiemnie i EF będzie proſtopadłą do SP. Też liniia EF, iako równoodległa od AB, ieſt też proſtopadłą do PD; a zatym będąc proſtopadłą tak do PD, iako i do PS, będzie także pro-

C ſtopa-

ſtopadłą i do płaſzczyzny SPD przechodzącey przez te dwie liniie; więc i AB równoodległa od EF będzie też proſtopadłą do płaſzczyzny SPD, a wſzczegulności będzie proſtopadłą do linii SD, znaydującey ſię na tey płaſzczyznie.

18. *Twierdz:* 11. Gdy płaſzczyzna iedna proſtopadłą ieſt do drugiey, a przez którykolwiek punkt iedney z tych płaſzczyzny pociągniemy proſtopadłą do drugiey, ta proſtopadła, padnie na ſpolne przecięcie tych dwóch płaſzczyzn.

Dowodz: Gdyby liniia SP nie padała na ſpolne przecięcie dwóch płaſzczyzn, tedy ſpuściwſzy z tegoż ſamego punktu S, proſtopadłą, do ſpolnego przecięcia, ta byłaby oraz proſtopadłą i do drugiey płaſzczyzny, a zatym dwie proſtopadłe z iednego punktu ſpuſzczone byłyby, na iednę płaſzczyznę, co być nie może.

19. *Twierdz:* 12. Gdy dwie płaſzczyzny proſtopadłe, ſą do trzeciey, ſpolne przecięcie tychże dwóch płaſzczyzn, proſtopadłe też będzie do teyże trzeciey płaſzczyzny.

Dowodz: Od punktu, w którym liniia przecięcia dwóch pierwſzych płazczyzn,

ſpotyka

ſpotyka trzecią płaſzczyznę; pociągnąwſzy tak naiedney iak i na drugiey z dwóch pierwſzych płaſzczyzn proſtopadłe do dwóch liniy ſpolnego ich przecięcia z trzecią płaſzczyzną, te dwie proſtopadłe, proſtopadłemi też będą do trzeciey płaſzczyzny; a zatym gdyby te dwie proſtopadłe nie zeſzły ſię w iednę, i nie były w rzeczy ſamey iedną liniią, która ieſt ſpolnym przecięciem dwóch pierwſzych płaſzczyzn, tedy od iednego punktu możnaby do iedney płaſzczyzny dwie proſtopadłe wyprowadzić; to zaś być nie może.

20. *Twierdz:* 13. Ggdy iedna liniia proſtopadłą ieſt do dwóch płaſzczyzn, te dwie płaſzczyzny, nigdzie ſię z ſobą nie zeydą, choćby naydaley były przedłużone.

Dowodz: Gdyby te dwie płaſzczyzny mogły ſię ſpotkać z ſobą, tedy Tróykąt zrobiony z tey proſtopadłey i z dwóch liniy poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na ſpolnym przecięciu dwoch tych płaſzczyzn, do punktów w których proſtopadła ſpotyka też płaſzczyny, miałby dwa kąty proſte, co być nie może.

Defin: Dwie płaſzczyzny, które nawet przedłużone ſpotkać ſię z ſobą nie mogą, nazywaią ſię *równoodległemi.*

21. *Twierdz:* 14. Gdy dwie liniie ſą równoodległe względem dwóch drugich, płaſzczyzna przechodząca przez dwie pierwſze liniie, będzie równoodległa od płaſzczyzny przechodzącey przez dwie drugie liniie.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie liniie AB, AC równoodległe względem dwóch drugich DE,DF; płaſzczyzna przechodząca przez liniie AB, AC, równoodległa będzie od płaſzczyzny przechodzącey przez liniie DE, DF.

Z wierzchołku A, kąta zawartego między dwiema pierwſzemi liniiami ſpuśćmy proſtopadłą AG do płaſzczyzny przechodzącey przez drugie dwie liniie, i od ſpodku G, tey proſtopadłey poprowadźmy na teyże ſamey płaſzczyźnie liniie GH, GI, równoodległe względem liniy DE, DF.

Liniia AG, proſtopadła do drugiey płaſzczyzny, ieſt też proſtopadłą, i do liniy GH, GI; a że liniie AC, GI, ſą obiedwie

biedwie równoodległe od linii DF, więc i od siebie są równoodległemi; a zatym liniia AG, ieſt także proſtopadłą do linii AC. Tymże ſposobem pokazać można, że liniia AG, ieſt też proſtopadłą i do linii AB. Więc ta liniia AG, ieſt proſtopadłą do płaſzczyzny przechodzącey, przez linie AB, AC; a zatym i dwie płaſzczyzny przechodzące iedna przez linie AB, AC, druga przez linie DE, DF, są obiedwie proſtopadłe do teyże ſamey linii AG, a przeto są od ſiebie równoodległe.

22. *Twierdz*: 15, Gdy dwie płaſzczyzny równoodległe od ſiebie przecina trzecia płaſzczyzna, ich ſpólne przecięcia z trzecią płaſzczyzną, będą też od ſiebie równoodległe.

Dowodz: Gdyby te ſpolne przecięcia, z trzecią płaſzczyzną ſpotkały ſię gdzie z ſobą, tedy punkt przecięcia tych dwóch przecięć, należąc tak do iednego iak i do drugiego ſpolnego przecięcia, dwóch płaſzczyzn z trzecią, należałby też tak do iedney, iak i do drugiey z dwóch płaſzczyzn przecinaiących trzecią; a zatym dwie płaſzczyzny ſpotkałyby ſię gdzie z ſobą, to ieſt nie byłyby, iak są, równoodległe.

23. *Twierdz*: 16. Gdy dwie płaſzczyzny są od ſiebie równoodległe; liniia któ-

ra

ra ieſt proſtopadłą do iedney, z tych płaſzczyzn, będzie proſtopadłą i do drugiey.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie płaſzczyzny równoodległe: BAC, EDF; i liniia AG proſtopadła, do iedney z tych płazczyzn nap: do pierwſzey; taż liniia proſtopadłą będzie i do drugiey płaſzczyzny.

Jeżeli liniia AG, nie ieſt proſtopadłą do którey kolwiek linii, takiey iak GH, przeciągnioney przez ſpodek G, teyże linii AG, który ieſt na płaſzczyznie EDF; tedy przeciągnąwſzy przez liniie GH, AG, płaſzczyznę, któraby przecięła płaſzczyznę BAC, w linii AB; liniia AG będzie proſtopadłą do linii AB; więc liniie AB, GH, z których iedna ieſt, a druga nie ieſt proſtopadłą do linii AG, leżącey na teyże ſamey, co one, płaſzczyznie, ſpotkać ſię mogą z ſobą; a przeto i płaſzczyzny, na których leżą ſpotkać ſię też z ſobą mogą, i nie będą równoodległe; co ieſt przeciwko warunkowi,

24, *Twie:* 17. Gdy dwie liniie lezące albo nie leżące na iedney płaſzczyznie, przecięte ſą przez trzy równoodległe od ſiebie

pła-

płaſzczyzny, te liniie będą od tych płaſzczyzn przecięte proporcyonalnie.

Niech będą dwie liniie AB, CD, leżące, albo nie, na iedney płaſzczyznie; niech trzy płaſzczyzny rownoodległe przecinaią pierwſzą liniią w punktach, B, F, A, a drugą w punktach, C,G,D; będzie, BF : AF = CG : DG. *Tab. I. Fig: 8.*

Poprowadźmy liniią BD, ſpotykaiącą płaſzczyznę średnią w punkcie E.

Liniie EF, AD, ſą ſpolnemi przecięciami płaſzczyzny BAD, z dwiema płaſzczyznami rownoodległemi; więc te dwie liniie ſą od ſiebie rownoodległe ; a zatym podobne ſą Tróykąty: BFE, BAD; przeto, BF : AF = BE : ED.

Dla teyże przyczyny podobne będą Tróykąty ; BDC, EDG, a zatym BE: ED = CG : GD. Więc też będzie, BF: AF = CG : GD.

Uwaga W tym razie tylko liniie BC, AD ſą równoodległe, i oraz liniie FE, EG, iednę czynią liniią, gdy liniie AB, CD na teyże ſamey płaſzczyznie znayduią ſię.

ROZDZIAŁ.

ROZDZIAŁ II.

O Kątach Bryłowych,

DEfin: Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaszczyznie ; od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokącie wyciągniymy linije do iednego punktu, nie na tey płaszczyznie będącego. Przy tym punkcie tyle się zrobi kątów znayduiących się na odmiennych płaszczyznach, ile Wielokąt nayprzod wykreślony, miał boków. Summa tych wszystkich *kątów płaskich*, nazywa się *kątem Bryłowym* (angulus solidus). Punkt, który iest spólnym wierzchołkiem wszystkich kątów płaskich, nazywa się: *wierzchołkiem* tego kąta bryłowego. Płaszczyzny na których się znayduią kąty płaskie , które ten wierzchołek czynią, nazwać można, *ścianami* (paries albo facies:) a zaś spolne tych płaszczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes*.)

Przestroga. W tym wszystkim, co się tu o kątach bryłowych powie, wystawiać sobie trzeba nie inne Wielokąty, iak tylko te, których krawędzie scho-

dząc

dząc się w ich wierzchołkach, same kąty wyskakuiące tam czynią (b).

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym: ściany albo kąty płaskie, ktòre go tworzą, pochyłości wzaiemne tych ścian, i stosunek placu zawartego między temi ścianami, do placu całego, około wierzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie sposob, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaskiego, względem całego placu, około wierzchołka tegoż kąta, na iedney z tym placem płaszczyznie znayduiącego się. *Obacz niżey, co służy do ostatniey tey uwagi, w Rozdziale o kuli (Sphæra.)* Jako Wielokąt, w którego wierzchołkach kończą się krawędzie kąta bryłowego, może być na Tróykąty podzielony przez przekątne ciągnione od iednego z wierzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek, podzielić można na inne kąty bryłowe, złożone z trzech tylko kątów płaskich. Przeto i Geometrowie naywięcey się bawią około kątów bryłowych

(b) *Obacz o innych kątach bryłowych, Rozprawę P: Bermanna, pod tytułem* De angulis solidis Dissertatio Vittembergæ 1764.

wych, trzema kątami płaſkiemi określonych, aby doſzli pochyłości ścian, lub ich wielkości; a potym wiadome maiąc doſtatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczaią kąt bryłowy, który ſię z tych ścian układa. Część ta Geometryi, w którey o kątach bryłowych rzecz ieſt, pod tą, pod którą ie wyſtawuiemy poſtacia nazywa ſię Trygonometryą *kulną*, albo ſferyczną. (Trigonometria ſpherica). Damy przyczynę tego nazwiſka, gdy ſię o kuli mówić będzie. Jeſt ta część koniecznie potrzebna Aſtronomom. Na daniu pierwſzych o niey początków, tu przeſtaniemy, i nie więcey mowić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle, ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podań ściągaiących ſię do ſamychże brył.

25, *Twierdz:* 1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, ſumma dwóch z tych trzech kątów, więkſza ieſt od kąta trzeciego.

Tab. II. Fig. 1. *Dowodz:* Niech będzie kąt bryłowy w A zrobiony z trzech kątów płaſkich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mnieyſzy ieſt od ſummy dwóch innych.

Jeżeli

Jeżeli te trzy kąty ſą wſzyſtkie równe, iuż oczywiście dwa, większe ſą od iednego.

Jeżeli zaś kąt ieden nap: BAC, większy ieſt tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD, tedy wſzelako mnieyſzy będzie od ſummy obydwóch.

Zróbmy albowiem na płaſzczyznie BAC, kąt BAE równy kątowi nap: BAD; i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, nap: B; Przez trzy punkta: B, D, E, niech przechodzi płaſzczyzna przecinaiąca krawędź AC w punkcie C.

Dwa Tróykąty: BAD, BAE, maią bok ſpolny AB, boki: AD, AE, równe, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a wſzczególności, linie: BD, BE, ſą równe. Aże w Tróykącie, BDC, ſumma boków: BD, CD większa ieſt od trzeciego boku: BC, więc bok DC, większy ieſt od linii CE; a zatym Tróykąty: CAD, CAE maią bok ſpolny AC, boki: AD, AE, równe; podſtawa zaś DC, iednego większa ieſt od podſtawy CE, drugiego; więc kąt: CAD, w wierzchołku

pier-

pierwſzego Tróykąta, większy ieſt od kąta: CAE, w wierzchołku drugiego; więc i ſumma kątów: BAD, CAD, większa ieſt od ſummy kątów: BAE, CAE, to ieſt: większa od kąta BAC.

26. *Twierdz:* 2. W kącie bryłowym, ſumma wſzyſtkich kątów płaſkich, mnieyſza ieſt od ſummy czterech kątów proſtych. (c)

Dowodz: Wierzchołki Wielokąta, na których wſpieraią ſię wſzyſtkie krawędzie kąta bryłowego, ſą oraz wierzchołkami tylu innych kątów bryłowych zrobionych

(c) *Trzeba mieć na pamięci, że ſię tu nie mówi, tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wſpieraią ſię na wierzchołkach Wielokąta, maiącego ſame tylko kąty wyſkakuiące. W przypadku od tego odmiennym, mogą być kąty bryłowe takie, w których ſumma kątów płaſkich, będzie większa od 4. kątów proſtych tyle, ile zechcemy. P. Le Sage Genewenczyk pierwſzy tę prawdę odkrył, która też pierwſza i ſama iedna zdaie ſię uchybienie zadawać Euklideſowi. Obacz Hiſtoryą Akademii Nauk Paryſkiey na Rok 1756.*

bionych przez kąty trzy płaſkie, ile ten Wielokąt ma wierzchołków; gdyż każde dwa z tych kątów płaſkich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduią ſię przy podſtawach ścian tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podſtawy kąta bryłowego w wierzchołku, to ieſt: do Wielokąta na ktòrym ſię wſzyſtkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku, wſpieraią.

Na każdey z tych ścian ſumma trzech kątów, iednego w wierzchołku, a dwóch przy pódſtawie ściany, równa ſię ſummie dwoch kątów proſtych; a za tym ſumma wſzyſtkich kątów w wierzchołku i wſzyſtkich kątów przy podſtawach ścian, równać ſię będzie, dwom kątom proſtym tyle razy wziętym, ile ma ścian kąt bryłowy.

Summa dwóch kątów przy podſtawach ścian, większa ieſt od kąta trzeciego przy podſtawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtemi robi kąt ieden bryłowy przy tey podſtawie; a zatym ſumma wſzyſtkich kątów przy podſtwach ścian wſzyſtkich, większa ieſt od ſummy wſzyſtkich kątòw przy podſtawie kąta bryłowego.

Więc

Więc ſummie wſzyſtkich kątów, przy podſtawach ścian, mniey nie doſtaie do ſummy dwa razy tylu kątów proſtych, ile Wielokąt, czyli podſtawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli ſummie wſzyſtkich kątów Wielokąta tego nie doſtaie do teyże ſummy dwa razy tylu kątów proſtych, ile ten Wielokąt ma boków.

A że ſummie kątów wſzyſtkich Wielokąta do przerzeczoney ſummy, brakuie 4. kątów proſtych, więc ſummie kątów wſzyſtkich przy podſtawach ścian, brakować będzie do teyże ſummy mniey niż 4. kąty proſte. Ze zaś ſumma wſzyſtkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, ſpełnia ten niedoſtatek mnieyſzy od 4. kątów proſtych, więc ſumma wſzyſtkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, mnieyſza ieſt od 4. kątów proſtych.

To Twierdzenie obiaśnić trzeba przez wiele przykładów ſzczegulnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego nap: 3, 4, 5, 6, i t. d. w których to razach, takoważ liczba 3, 4, 5, 6, i t. d. będzie wyrażać boki Wielokąta ſłużącego kątowi bryłowemu za podſtawę; ſumma zaś ką-

tow

tów Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów proſtych, a zatym ſumma kątów przy podſtawach ścian będzie ważyć więcey niż 2, 4, 6, 8, i t, d. kątów proſtych. Ze zaś ſumma tych oſtatnich kątów wraz z ſummą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach, kątów proſtych 6, 8, 10, 12, więc ſumma kątów ſamych przy tym wierzchołku mnieyſza ieſt, niż *nadmiar* (exceſsus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

To ieſt: ta ſumma kątów przy wierzchołku mnieyſza ieſt od 4. kątów proſtych.

Można prawdę tego Twierdzenia okazać i w ſposób naſtępuiący:

Obierzmy punkt iakikolwiek, wpośród Wielokąta, i pociągniymy od niego liniie do wſzyſtkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wſzyſtkich kątów, około tego punktu, zrówna ſummę 4. kątów proſtych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaſzczyznę Wielokąta,

podług

podług ciągu linii proſtopadłey do tey płaſzczyzny. Jm bardziey ten punkt oddalony będzie od wierzchołków Wielokąta, tym bardziey zmnieyſzy ſię każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniiami, od niego poprowadzonemi do wierzchołków Wielokąta; a zatym tym mnieyſza będzie ſumma wſzytkich kątów przy tym punkcie, od ſummy pierwſzey 4. kątów proſtych.

27. *Przyſtoſowanie.* Pięć tylko ieſt gatunków kątów należących do Wielokątów foremnych, z których może ſię złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Tróykąta równobocznego, każdy taki kąt ważyłby $\frac{2}{3}$ kąta proſtego, a zatym ſumma ich ważyłaby 2. kąty proſte.

2. W kącie bryłowym, złożonym z czterech kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów, ważyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proſte.

3. W kącie bryłowym, złożonym z pięciu kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proſte. Sześć

Sześć kątów Tròykąta rownobocznego, waży katów proſtych cztery. Są one zdatne do napełnienia placu, około punktu iakiego na płaſzczyznie, nie zaś do zrobienia kąta bryłowego. Summa więcey niż ſześciu takowyeh kątów, ważyłaby też więcey niż cztery kąty proſte.

4. W kącie bryłowym złożonym z trzech katów kwadratu, każdy takowy kąt, byłby kątem proſtym, a zatym ſumma takowych kątów równałaby ſię ſummie 3 kątów proſtych; ſumma 4 kątów kwadratu, byłaby ſumma 4 kątów proſtych; a przeto z 4 takowych kątów ſkładać ſię nie może kat bryłowy, daleko zaś bardziey ſkładać ſię nie możc z większey liczby takich kątów.

5. W kącie bryłowym, złożonym z trzech katów, Pięciokąta foremnego, każdy takowy kąt ważyłby $1\frac{1}{5}$ kat proſty; a zatym ſumma ich ważyłaby $3\frac{3}{5}$ kąty proſte.

Summa czterech takowych kątów, a tym bardziey więcey niż czterech ważyłaby więcey, niż cztery kąty proſte.

Summa trzech kątów Sześciokąta foremnego waży cztery kąty proste, a zatym żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta foremnego; tym bardziey zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów foremnych, które więccy niż sześć boków maią.

Jeżeli tedy znayduią się bryły iakie, których ścianami są Wielokąty iednakowego tylko gatunku, takich brył gatunków, więcey iak pięć być nie może.

Bryła, ktòrey każdy kąt bryłowy złożony iest z trzech kątów Tróykąta równobocznego, ma 4. ściany, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywa się *Czworościanem* (Tetràédrum).

Bryła, której każdy kąt złożony iest z 4. kątów Tróykąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 6. kątów bryłowych. Nazywa się *Ośmiościanem* (Octòédrum.)

Bryła, której każdy kąt złożony iest z 5 kątów Tróykąta równobocznego, ma

ma 20. ścian, z których każda ieſt Tróykątem równobocznym, i 12, kątów bryłowych. Nazywa ſię *Dwudzieſtościanem* (Icosàédrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony ieſt z 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda ieſt kwadratem, i 8 kątów bryłowych. Nazywa ſię *Sześcianem* (Hexàédrum,) a zwyczayniey (*Cubus.*)

Bryła, którey każdy kąt złożony ieſt z 3 kątów Pięciokąta foremnego, ma 12 ścian, z których każda ieſt Pięciokątem foremnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywa ſię *Dwunaſtościanem* (Dodecàédrum.)

Doſyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obſzerne w tey mierze rozwodzenia ſię, które więcey ſamey ciekawości dogadzaią, niż pożytek przynoſzą. Te bryły, gdy wſzyſtkie kąty maią równe, i wſzyſtkie ściany foremne, i mogące przyſtać iedne do drugich, nazywaią ſię bryłami *foremnemi.*

Gdyby w kącie bryłowym pomieſzać chcieliśmy różne kąty Wielokątów foremnych, końcem złożenia tegoż kąta

D 2 bryło-

bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby być do upodobania powiększona.

28. *Twierdz:* 3. Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z trzech kątów płaskich, równych iednych, względem drugich; pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych równe też są iedne względem drugich.

Tab. II *Fig.* 2. Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD, abcd złożone z równych kątów względem siebie: BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względem drugich; nap: pochyłość płaszczyzny BAD do BAC, równa iest pochyłości płaszczyzny bad, do bac.

Wykreśl: Weźmy równe linije AB, ab, na płaszczyznach: BAD, bad; wynieśmy do AB prostopadłą BD, a do ab, prostopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac, wyprowadzmy do tychze linii AB, ab, prostopadłe: BC, bc. Kąty CBD, cbd, będą kątami pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i bad, bac; a zatym dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd, są równe.

Dowodz:

Dowodz: Dwa Tróykąty DBA, dba ſą proſtokątne w B i b; maią rowne kąty BAD, bad, i boki: AB, ab, równe; więc mogą przyſtać do ſiebie; a wſzczegulności, liniie: BD, bd ſą równe, iako też i liniie AD, ad.

Dla teyże przyczyny i Tróykąty BAC, bac przyſtać do ſiebie mogą, a wſzczegulności liniie BC, bc, ſą rowne, iako też i liniie AC, ac.

Więc Tróykąty CAD, cad, maią boki AC, ac równe; i boki AD, ad także równe, a maiąc oprocz tego i kąty między temi bokami zawarte, równe, przyſtać do ſiebie mogą; wſzczegulności zaś liniie CD, cd, ſą rowne.

Więc Tróykąty: CBD, cbd, maią wſzyſtkie boki rowne, iedne względem drugich, a zatym do ſiebie przyſtać mogą; a wſzczegulności kąty: CBD, cbd, ſą rowne.

29. *Twierdz*: 4. Gdy dwa kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów płaſkich, które równe ſą iedne względem drugich, takie kąty bryłowe, mogą przyſtać do ſiebie,

Niech

Niech będzie kąt bryłowy w A. złożony z trzech kątów płaskich: BAD, BAC, DAC, równych względem kątów płaskich: bad, bac, dac, z których się składa kąt drugi bryłowy w *a*.; te dwa kąty bryłowe, mogą przystać do siebie.

Wystawmy sobie w myśli drugi z tych kątów, iakoby przeniesiony, tak; aby wierzchołek a, przypadł na wierzchołek A; liniia zaś ab aby leżała na linii AB. Ponieważ kąty: BAD, bad, wzięte są za równe, liniia więc ad, będzie też leżeć na linii AD.

Aże trzy kąty płaskie w *a*, równe są trzem kątom w A; równe więc będą pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i płaszczyzn bad, bac; a zatym płaszczyzna bac, leżeć będzie na płaszczyznie BAC. Dla równości zaś kątów bac, BAC, liniia ac leżeć będzie na linii AC; więc tak liniia ad, leży na linii AD, iak i ac na AC; a zatym płaszczyzna cad przystanie do płaszczyzny CAD; przystaną tedy do siebie te dwa kąty bryłowe.

30. *Wniosek.* Kąt bryłowy, określony trzema kątami płaskiemi, iuż tym samym iest wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaskie.

Możnaby

Możnaby też pokazać, że z trzech kątów płaskich czyniących kąt bryłowy maiąc wiadome dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścian, wyznacza się także kąt bryłowy; iako też z wiadomey tylko pochyłości wszystkich trzech ścian tego kąta.

Te iednak ostatnie podania, iż nieslużą do naszego zamierzenia, przeto dosyć iest tu o nich tylko namienić.

31. *Zagadn:* 1. Zrobić kąt bryłowy, maiąc dane trzy kąty płaskie, z których ma być złożony tenże kąt bryłowy.

Do składu tego kąta bryłowego z 3, kątów płaskich; następuiący sposob, zdaie się być naywygodnieyszym.

Niech będą dane trzy kąty płaskie: BAD, BAC, DAC, do zrobienia kąta bryłowego. Wystawmy sobie myślą. iż ten kąt iuż iest zrobiony. Weźmy którykolwiek punkt C, na krawędzi nap: AC; i od tego punktu, spuśćmy na inne krawędzie, AB, AD, liniie prostopadłe: CB, CD; a znowu od punktów B, i D, na płaszczyznie BAD, poprowadźmy do teyże krawędzi, prostopadłe: BE, DE, *Tab: II. Fig: 3.*

które

które się przetną, w punkcie E. Pociągniymy nakoniec linie: CE, AE.

Ponieważ linie CB, EB są prostopadłe do linii AB, linia więc AB iest prostopadłą do płaszczyzny: CBE; a zatym płaszczyzna BAD, która przechodzi przez linią AB, iest też prostopadłą do płaszczyzny: CBE; a wzaiemnie, i ta płaszczyzna iest do tamtey prostopadłą. Dla teyże przyczyny, płaszczyzna, CDE, prostopadłą iest do płaszczyzny BAD; więc obiedwie płaszczyzny: CBE, CDE, prostopadłe są do płaszczyzny: BAD; a zatym spolne ich przecięcie CE, iest także prostopadłym do płaszczyzny BAD; i płaszczyzna CAE, iest także prostopadłą do teyże płaszczyzny BAD. Zkąd wypada takowe wykreślenie.

Po obydwóch stronach linii ac, przy punkcie *a*, nakreślmy kąty: cab, cad, równe względem kątów danych CAB, CAD. Od punktu któregokolwiek teyże linii ac, nap: od *c* spuśćmy na dwa drugie ramiona, ab, ad, linie prostopadłe: cb, cd; a na ramionach trzeciego kąta weźmy, zacząwszy od wierzchołka A, linie AB, AD, równe względem liniy ab, ad. Od punktów B, i D wy-

pro-

prowadźmy prostopadłe do liniy AB, AD, przecinaiące się w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu prostopadłą EC, do płaszczyzny BAD. Niech przez liniie EC, i AE przechodzi inna płaszyzna, na którey z punktu A, iak ze środka, promieniem równym odległości ac, nakreślmy łuk koła, który przetnie prostopadłą EC, punkcie C; Naostatek przez punkt C, i liniie AB, AD, niech przechodzą dwie płaszczyzny te, wraz z płaszyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którego szukamy.

Jnaczey ieszcze punkt C, będzie wyznaczony na prostopadłey EC; gdy tylą liniią, EC, weźmiemy, aby kwadrat iey równał się różnicy kwadratów: linii ae, i AE, albo różnicy kwadratów: cd, i DE, albo nakoniec różnicy kwadratów: be i BE.

32. *Uwaga.* Używaiąc tego wykreślenia, można łatwo dowieść następuiące Twierdzenie, na którym się zasadza Trygonometrya kulna; to iest, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaskich, wstawa iednego kąta płaskiego, iest do wstawy

drugie.

drugiego, iak wſtawa kąta pochyłości przeciwnego pierwſzemu kątowi, do wſtawy kąta pochyłości przeciwnego drugiemu kątowi; to ieſt, iak wſtawa kąta pochyłości płaszczyzn dwóch ścian pod pierwſzym kątem będących, do wſtawy kąta pochyłości dwóch także ścian pod drugim kątem będących.

Jakoż liniie: CD, CB, ſą wſtawami, pierwſza kąta CAD, drugą, kąta CAB, wziąwſzy za promień linią AC; a zatym te dwie liniie tak ſię do ſiebie maią, iak wſtawy tych dwóch kątów.

Aże w Tróykącie ECD proſtokątnym w E; CD : CE = Pr:Wſt. CDE

A w Tróyk. EBC; CE: CB = Wſt:CBE:Pr:

Więc złożywſzy te ſtoſunki, będzie; CD:CB = Wſt: CBE: Wſt. CDE.

To ieſt: Wſtawa kąta CAD, tak ſię ma do wſtawy kąta CAB, iak wſtawa kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wſtawy kąta pochyłości dwóch płaſzczyzn BAD, CAD.

32. *Zagadn:*

33. *Zagadn:* 2. Maiąc dane trzy kąty płaſkie, z ktòrych ſię ma ſkładać kąt bryłowy, wyrachować, iaka ma być pochyłość płaſzczyzn, aby ten kąt zrobiły.

Spoſob 1. W Czworokącie ABED, kąty przeciwne B, i D ſą proſte: więc Czworokąt ten może być wkoło wpiſanym, a zatym kąty (w tymże ſamym odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawſzy tedy w Tróykącie BAD kąt ADB, iuż tym ſamym znaydziemy i kąt AEB, równy tamtemu.

Stoſunek boku BC do BE, to ieſt ſtoſunek wſtawy całey, czyli promienia, do Doſtawy kąta pochyłości CBE, ſkłada ſię z ſtoſunków boków: BC do AB i AB do BE.

Ażeieſt; BC: AB=Styez. BAC: Wſt. całey,

i - AB: BE=Wſt.cała: Doſtycz. AEB

więc; BC: BE=Sſtycz. BAC: Doſt. AEB

A zatym; BC : BE = BAC : Doſt. CBE

Stycz.—BAC: Doſt: AEB=Pr: Doſt: CBE.

Spoſob 2. Wyciągnowſzy od punktu iednego nap: B znayduiącego ſię na któ-

reykol-

reykolwiek krawędzi kąta bryłowego, proſtopadłe: BD, BC, do tey krawędzi, a na dwóch płaſzczyznach, których ſpolnym przecięciem ieſt ta krawędź, niech te dwie proſtopadłe ſpotykaią dwie drugie krawędzie w punktach: C, i D: Liniie BC, BD będą ſtycznemi, a liniie AC, AD będą ſiecznemi względem kątów, BAC, BAD, biorąc za promień liniią AB. Więc te liniie, mogą być wyrachowane na miarę linii ſtałey AB, czyli promienia. W Tróykącie CAD wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między niemi zawarty możemy wyznaczyć bok trzeci CD. W Tróykącie zatym CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a ztąd możemy wyznaczyć kąt CBD, który ieſt kątem pochyłości dwóch płaſzczyzn: BAD, BAC. Jnne też kąty pochyłości łatwo wyznaczemy podług uwagi poprzedzaiącey.

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podnieſieniu liczby do iey Sześcianu albo Kubusa, *i o wyciągnieniu Pierwiaſtku Sześciennego, albo Kubicznego.*

Przed naſtępuiącemi *Rozdziałami*, kładzie ſię nauka o podnieſieniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Pierwiaſtku ſześcien-

ſześciennego; bo właśnie w tych rozdziałach, można będzie naukę tę do praktyki zaraz przyſtoſować.

34. Sześcian liczby iakiey robi ſię, gdy tę liczbę przez nią ſamą raz mnożemy, i tak rozmnożoną, ieſzcze raz przez nią mnożemy albo, co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożemy przez iey kwadrat. I tak Sześciany dziewięciu liczb pierwſzych.

1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9.

ſą: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześciany liczb:

10. 20. 30, 40, - - - 90.

są; 1000, 8000, 27000, 64000, - - - 729000.

Sześciany liczb:

100, 200, 300, - - 900.

ſą: 1000000, 8000000, 27000000, 729000000.

35. Sześciany więc liczb maiących iednę tylko cyfrę, a reſztę zerów, ſą te ſame,

ſame, co i ſześciany tychże cyfr ſamych przez ſię, przydawſzy im trzy razy tyle zerów, ile ich było w liczbie z którey ſię Sześcian robi.

Wyraz ten *Sześcian*, wzięty ieſt z Geometryi, w którey, aby mieć bryłowatość iakiego Sześcianu, rozmnaża ſię liczba wyrażaiąca wielkość boku iego, raz i drugi przez ſiebie.

Sześcian każdey liczby znaleść można, mnożąc iey kwadrat przez nią ſamę; podamy tu iednak inny ſpoſob zrobienia Sześcianu z liczby daney, a ten ſposób pomoże nam do przeciwnego działania, to ieſt do wyciągania Pierwiaſtku Sześciennego z liczby iakieykolwiek.

36. Sześcian liczby złożony z dwóch części, może byé rozłożony na cztery części naſtępuiące.

1. Na Sześcian pierwſzey części.

2. Na Kwadrat pierwſzey części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.

3. Na Kwadrat drugiey części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część pierwſzą.

4. Na

4. Na Sześcian drugiey części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części naprzyk: 1, i 4; można uważać iey Sześcian, iakoby złożony z czterech części: 1, 12, 48, 64, których Summa iest: 125. Gdybyśmy zaś tę samę liczbę 5, uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iey Sześcian mogłby się był rozłożyć na cztery części: 8. 36, 54, 27.

Niechby potrzeba znaleść Sześcian liczby nap: 47; Ponieważ iey kwadrat (podług reguły iuż nam wiadomey) składa się z kwadratu pierwszey części 40, z teyże części 40, dwa razy wziętey, przez drugą, 7. rozmnożoney, i z kwadratu drugiey części 7; mnożąc cały ten kwadrat ieszcze raz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcian z 47 składać się będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożonego przez 7, z 40, rozmnozonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu teyże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą;) biorąc znowu 40, za liczbę mnożącą; Sześcian z 47, składać się ieszcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat

liczby

liczby 40, dwa razy wziety; i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty; a razem to wszystko zebrawszy, składać się będzie z Sześcianu liczby 40, z kwadratu teyże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7, z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, á rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7. Co uczyni Summę: 103823, która iest Sześcianem liczby 47.

Ponieważ zaś niemożna ieszcze dowieść tego Algebraicznie, trzeba przynaymniey będzie z Geometryi zaciągnąć obiaśnienia, pokazuiąc; że Sześcian linii złożoney z dwóch części, może być w rzeczy samey rozłożony na Sześciany każdey, z tych dwóch części, i na 6. Równoległościanow, z których trzy mieć będą za podstawę kwadrat iedney części; a za wysokość część drugą; trzy zaś inne, mieć będą za podstawę kwadrat drugiey części, a za wysokość część pierwszą.

Wykonać to w skutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papieru tak zrobionym, aby te części od siebie się oddzielały.

38. Nay-

38. Naywygodniey ieſt, rozłożyć liczbę na iedności, dzieſiątki, ſta, i t. d. które w ſobie zawiera.

Niech będzie liczba nap: 12. Podzielmy ią na dwie części, 10, i 2. Sześcian iey ſkładać ſię będzie z części naſtępuiących:

1000. Sześcan dzieſiątku

600. Kwadrat dzieſiątku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.

120. Kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dzieſiątek rozmnożony

8. Sześcian dwóch iedności.

1728 Sześcian z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana na dwie części 80, i 4; Sześcian iey mieć będzie części naſtępuiące:

512000.	Sześcian dzieſiątków,
76800.	Kwadrat dzieſiątków trzy razy wzięty, przez iedności romnożony.
3840.	Kwadrat tychże iedności trzy razy wzięty przez dzieſiątki rozmnożony.
64.	Sześcian z iedności.
592704.	Sześcian z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebrana na dwie części 320 i 4; aby zaś mieć Sześcian pierwſzey części, rozłożmy ią na części 300, i 20,

27000000.	Sześcian ſtów
5400000.	Kwadrat ſtów potróyny przez dzieſiątki rozmnożony.
360000.	Kwadrat dzieſiątków potróyny przez ſta rozmnożony.
8000.	Sześcian dzieſiątków.
1228800.	Kwadrat z 320 potróyny rozmnożony przez iedności
15360.	Kwadrat z iedności potróyny, rozmnożony przez 320.
64.	Sześcian iedności.
34012224.	Sześcian z 324.

Niechby

Niechby trzeba zrobić Sześcian z 8421.

512000000000	Sześcian z 8000,
76800000000	Kwadrat z 8000 potróyny, roz: przez 400.
3840000000.	Kwadrat z 400 potróyny roz: przez 8000.
64000000.	Sześcian z 400.
4233600000.	Kwadrat z 8400 potròyny rozm: przez 20.
10080000.	Kwadrat z 20. potróyny rozmn: przez 8400.
8000.	Sześcian z 20.
212689200.	Kwadrat z 8420 potróyny rozmn: przez 1.
25260.	Kwadrat z 1. potróyny rozmn: przez 8420.
1.	Sześcian z 1.

597160402461. Sześcian z 8421.

39. Widziemy na poprzedzaiących przykładach, iż przez takowy rozbior, każda część następuiąca Sześcianu mniey ma iednym zerem, od części, ktora ią poprzedziła; i że iako pierwsza część Sześcianu iest zawsze Sześcianem, a po nim następuią dwie części, każda złożona z potróynego kwadratu iedney części rozmnożonego przez część drugą; tak i daley, tymże porządkiem idą, i dalsze wyrazy części składaiących Sześcian.

40. Można było opuścić zera kładąc tylko same cyfry znaczące, a w każdey części następuiącey występuiąc z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześcianu mogły być w ten sposób wypisane.

27
54
36
8
12288
1536
64.
34012224.

41. Ten

41. Ten ſposob poſtępowania, pokazuie nam, że liczba wyrażaiąca Sześcian iedności, kończy ſię na oſtatniey po prawey ręce cyfrze, że Sześcian dzieſiątków kończy ſię na czwartey od prawey ręki cyfrze; liczba Sześcianu ſtów, kończy ſię na ſiodmey cyfrze od teyże ſtrony rachuiąc, i t, d.

Zeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażaiących Pierwiaſtek Sześcianu danego, trzeba od prawey ſtrony zaczynaiąc, oddziały co trzy cyfry kreſkami poczynić; a ile będzie tych oddziałów, tyle też cyfr będzie ſię znaydowało w Pierwiaſtku. Oddział pierwſzy po lewey ſtronie może mieć trzy, dwie, a czaſem i iednę tylko cyfrę, iako to przykłady poprzedzaiące okazuią. I tak Pierwiaſtki ſześcienne liczb 1,331; 32,767; 226,981; maią dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331, wyciągnąć pierwiaſtek ſześcienny:

Ta liczba ma dwie cyfry w ſwoim Pierwiaſtku, bo dwa w niey uczynić można oddziały, tym ſpoſobem: 1,331. Naywiękſza liczba dzieſiątków tego Pierwiaſtku taka być powinna, aby iey

Sześcian

Sześcian nie był większy od 1; a zatym będzie tylko ieden dziesiątek w Pierwiastku. Sześcian z 10, iest: 1000; który Sześcian odiąwszy od 1331, zostanie 331. Ta reszta powinna zamykać w sobie potróyny kwadrat dziesiątka rozmnożony przez iedności; potróyny kwadrat tych iedności, rozmnożony przez dziesiątek, i Sześcian tychże iedności. Aże wszczególności ta reszta, ma w sobie zamykać kwadrat potróyny dziesiątka rozmnożony przez iedności; wystawmy więc sobie tę resztę 331, iak gdyby zamykała tylko sam potròyny kwadrat z 10, to iest 300. Wieloraz z 331, przez 300 podzielonych, iest: 1, więc iedna iedność będzie w Pierwiastku. Rozmnożywszy 300 przez 1, będzie 300, a te, od 331, odiąwszy, zostanie 31. Ta reszta ma ieszcze w sobie zamykać potróyny kwadrat iedności przez dziesiątek rozmnożony, to iest: 30; i Sześcian iedności, to iest: 1, a zewszystkim 31, ktòre odiąwszy od ostatniey reszty nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek sześcienny liczby 1331, iest: 11.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 68,921. Pierwiastek tey liczby ma dwie cyfry. Liczba dziesiątków taka

ka być powinna, aby Sześcian iey odiąć można od pierwszego podziału: 68. Aże z Tablicy dziewiąciu pierwszych sześcianów (34) którą uczniowie umieć na pamięć powinni, Sześcian naybliższy 68; iest 64. a tego Pierwiastek iest: 4; więc w Pierwiastku będą 4 dziesiątki. Sześcian z 40, iest: 64000; odiąwszy go od 68921, zostanie 4921. Ta reszta ma wszczegulności zawierać w sobie potròyny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, to iest ma w sobie zawierać 4800 rozmnożone przez iedności. Dzieląc 4921. przez 4800, wypada 1, na wieloraz, więc będzie w Pierwiastku iedna iedność. Odiąwszy od 4921, kwadrat potróyny 4800. rozmnozony przez 1, zostanie 121. Ta reszta ma ieszcze w sobie zawierać kwadrat potróyny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki, to iest 120, i Sześcian iedności, to iest 1, a ze wszystkim, 121; które odiąwszy od ostatniey reszty, nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek zupełny będzie: 41.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 884,636. Ta też liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku. Sześcian naybliższy liczby 884. iest: 729, którego

rego Pierwiastkiem iest: 9, więc Pierwiastek będzie miał 9 dziesiątków. Sześcian z 90, iest 729000; który odiąwszy od 884736, zostanie 155736. Kwadrat z 90, iest 8100, potròyny będzie: 24300. Dzieląc przez 24300, resztę 155736, na wieloraz wypada 6, więc Pierwiastek mieć będzie 6. iedności. Rozmnożywszy 24300 przez 6, będzie 145800, które odiąwszy od 155736, zostanie 9936. Kwadrat potróyny 6 iedności, rozmnożony przez 9 dziesiątków, będzie 9720, odiąwszy go od 9936, zostanie 216, nakoniec Sześcian z 6, iest 216; a zatym Pierwiastek zupełny będzie 96. Jakoż Sześcian z 96, iest: 884,736.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 590,589,719. Ten powinien mieć trzy cyfry.

Liczba stów w Pierwiastku taka być powinna, aby iey Sześcian, nieprzechodził 590. Z dziewiąciu pierwszych Sześcianów, naybliższy liczby 590 iest Sześcian: 512, którego Pierwiastek; iest 8; a zatym 8 stów będzie w Pierwiastku. Odiąwszy 512000000, od Sześcianu danego, zostanie 78589719. Kwadrat

drat potróyny ſtów 8, albo 800, to ieſt 1920000 znayduie ſię razy 40 w tey reſzcie ; mogłoby więc zdawać ſię, iż 4 dzieſiątki Pierwiaſtek mieć powinien; aleby nie można od 78589719 odiąć dwóch innych części, to ieſt kwadratu potróynego dzieſiątków rozmnożonego przez ſta, i Sześcianu dzieſiątków; nie można przeto więcey dać Pierwiaſtkowi, iak 3 dzieſiątki. Liczbę 1920000, rozmnożoną przez 30, to ieſt 57600000, odiąwſzy od 78589719, zoſtanie 20989719; od tey reſzty odiąwſzy znowu kwadrat potróyny 3 dzieſiątków, przez ſta rozmnożonych , to ieſt 2160000, zoſtaie 18829719 a po odięciu Sześcianu dzieſiątków, to ieſt 27000, będzie wreście, 18802719, Kwadrat potróyny części Pierwiaſtku znalezioney, to ieſt liczby 830, ieſt 2066700; przez ten dzieląc reſztę 18802719, wypadnie 9 iedności na wieloraz. Odiąwſzy od tey reſzty , liczbę 2066700, rozmnożoną przez 9, to ieſt: 18600300, zoſtanie 202419 ; zkąd znowu odiąwſzy kwadrat potróyny iedności 9, rozmnożony przez 830, to ieſt 201690, zoſtaie 729. Naoſtatek Sześcian z 9 ieſt: 729, a zatym Pierwiaſtek którego ſzukaliśmy będzie 839.

Wzor

Wzor działań w przykładach poprzedzaiących.

Przykład 1.

```
     1,331.|10.
     1 000 |
     ------
300|  331 |1.
   |  300 |
     ------
       31.
       30
      ----
        1.
        1
      ----
        0
```

Przykład 2.

```
       68,921|40
       64 000|
      --------
4800|   4 921|1.
    |   4 800|
      --------
          121.
          120
         -----
            1
            1
         -----
            0
```

Przykład

Przykład 3.

```
       884,736.|90
       729 000 |
       --------
24300| 155736 |6.
     | 145800 |
       --------
         9936.
         9720.
         -----
          216.
          216.
          ----
           0.
```

Przykład 4.

```
         590,589,719,|800
         512 000,000 |
         ------------
        |78589719|30.
1920000 |57600000|
         --------
         20989719.
          2160000
         ---------
         18829719.
            27000
         ---------
        |18802719|9
2066700 |18600300|
         --------
           202419
           201690
           ------
              729
              729
              ---
               0.
```

Więcey takowych przykładów należy podać Uczniom, nie używaiąc ieszcze żadnego skrócenia.

45. Pierwſze ſkrócenie, na tym zawiſło, aby opuſzczać zera, w liczbach dzielących, podzielnych, i w wielorazach; maiąc iednak zawſze uwagę na mieyſca, które zaſtępować przypada cyfrom znaczącym. W ſzczegulności zaś co do wielorazow, będzie ten z opuſzczania zerów pożytek, że zaraz przy ſobie kłaść będzie można cyfry wyrażaiące Pierwiaſtek, którego ſzukamy.

Drugie ſkrócenie, związane z pierwſzym na tym ſię zaſadza, aby do każdego naſtępuiącego dzielenia, tyle tylko cyfr z Sześcianu przyłączać do reſzty pozoſtałey, ile ich wyciągać będzie przypadaiące odeymowanie; daremna albowiem byłaby praca, przy każdym odeymowaniu, wſzyſtkie pozoſtałe Sześcianu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ oſtatnie zwłaſzcza cyfry przez większą część działania nie naruſzone zoſtaią.

Trzecie ſkrócenie na tym zawiſło, aby za iednym razem odiąć kwadrat potróyny części znalezioney, rozmnożony przez część naſtępuiącą; kwadrat potróyny teyże części drugiey, rozmnożony przez część pierwſzą znalezioną, i Sześcian

tey

tey części drugiey. To zaś wykona ſię, dodaiąc razem tę trzy liczby odeymować ſię maiące, i tak dodane odeymuiąc od Sześcianu, z którego Pierwiaſtek wyciągamy. Zawſze iednak mieć trzeba na to uwagę, aby w liczbach, które pierwey dodawać, a potym ich ſummę odeymować mamy, zachowane było mieyſce każdey cyfrze właściwe; iako też wzgląd mieć należy na położenie cyfrów tych, od których inne odeymować przypada.

Przyſtoſowanie. Niechby z liczby 257,259,456, trzeba wyciągać Pierwiaſtek Sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy, Naywiękſzy Sześcian zawarty w 257, ieſt 216, którego Pierwiaſtek ieſt: 6, odiąwſzy ten Sześcian od 257, zoſtanie 41. Do tey reſzty przyłączmy naſtępuiący oddział 259, będzie 41259. Niemaiąc tym czaſem względu na oſtatnie dwie cyfry: 59, dzielmy 412 przez potròyny kwadrat z 6, to ieſt przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz ſummę trzech liczb: $^{324}_{\ 162}$. to ieſt kwadratu potróynego z 6. ^{27} ſtów rozmnożonego przez 3 dzieſiątki, kwadratu potróynego z 3 dzieſiątków rozmnożonego przez 6. ſtów, i Sześcianu z 3 dzieſiątków. Summę

mę 34047 odeymiymy od 41259, zoſtanie 7212; przy których przypiſawſzy oſtatni oddział 456, będzie 7212456. Nie uważaiąc tym czaſem na oſtatnie dwie cyfry, dzielmy 72124 przez kwadrat potróyny z części Pierwiaſtku znalezioney, to ieſt przez 11907, wypadnie 6, na wieloraz. Weźmy ſummę trzech liczb: 71442 6804 216 to ieſt kwadrat potroyny części pierwey znalezioney, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potróyny z 6. iedności rozmnożony przez część pierwey znalezioną, i Sześcian z 6. iedności. Summa 7212456 równa ſię reſzcie oſtatniey; co znakiem ieſt że Pierwiaſtek, którego ſzukaliśmy, ani mnieyſzy ani więkſzy ieſt, iak 636.

To działanie bardziey długie, niż trudne, wyciąga od uczniów częſtego w nim ćwiczenia ſię.

44. Aby wyciągnąć Pierwiaſtek Sześcienny z ułomku, którego tak licznik, iako i mianownik ieſt Sześcianem; trzeba go oſobno wyciągać z każdego z tych wyrazów. I tak Pierwiaſtek ſześcienny z $\frac{125}{216}$, ieſt: $\frac{5}{6}$. Pierwiaſtek z $\frac{64}{343}$. ieſt: $\frac{4}{7}$:. Aby zaś wyciągnąć Pierwiaſtek Sześcienny z liczby mieſzaney,

trzeba

trzeba ią pierwey zamienić na ułomek. I tak Pierwiaſtki ſześcienne liczb mieſzanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$, ſą te ſame co i ułomków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$. to ieſt: $\frac{3}{2}$. $\frac{10}{3}$, albo $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$.

45. Co ſię o Pierwiaſtku kwadratowym powiedziało (w Części 1. Geom: § 128) ściąga ſię i do Pierwiaſtku ſześciennego; to ieſt; że ieżeli nie można mieć Pierwiaſtku Sześciennego liczby całkowitey, w liczbach całkowitych, tedy go i w ułomkach nie znaydziemy. Dowodzi ſię to ogulnie tymże ſamym, iak względem Pierwiaſtku kwadratowego ſpoſobem. (d)

46. Pierwiaſtek Sześcienny liczby iakiey, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Spoſob nayogulnieyſzy ieſt, używaiąc do tego ułomków dzieſiątnych. Niechby naprzykład trzeba z 2 wyciągnąć Pierwiaſtek

---

(d) *Otoż i drugi rodzay ilości nie ſpółmiernych. Pierwſzego rodzaiu ilości nieſpółmierne można Geometrycznie wyrazić; lecz wyrazenie tych drugich, wyżſzey nad początkową nauki potrzebuie.*

ſtek ześcienny, przybliżaiąc go do prawdziwego w cząſtkach tyſiącznych. Wyciągaymy ten Pierwiaſtek, ſposobem dopiero podanym, z liczby 2000000,000, a oſtatnie trzy tego Pierwiaſtku cyfry połozmy za dzieſiątne. Pierwiaſtek Sześcienny liczby: 2000000000 w liczbach całkowitych naybliżſzych wyrażony, ieſt: 1259; a zatym Pierwiaſtek Sześcienny liczby 2, przybliżony aż do części tyſiącznych iedności będzie 1,259. Jakoż Sześcian z 1,259, ieſt: 1,995616979 mnieyſzy od 2, a Sześcian 1,26, ieſt: 2,259576, większy od 2.

47. Chcąc Pierwiaſtek ſześcienny liczby nap: 2, przybliżyć do prawdziwego, w ułomkach zwyczaynych, podwoiwszy pierwſze dziewięć Sześcianów liczb *naturalnych*, 1,2,3.4. i t. d. uważać należy (podobnie iako ſię o przybliżeniu Pierwiaſtku kwadratowego w Części I. powiedziało:) ieżeli między temi Sześcianami podwoionemi, nieznayduie ſię taki, któryby bliſki bardzo był Sześcianu zupełnego. Znaydziemy nap: że 64. podwoione, to ieſt 128, mało ſię co różni od 125, to ieſt od Sześcianu liczby 5; a zatym 2, które równa ſię cale $\frac{128}{64}$; będzie też prawie równe $\frac{125}{64}$;

przeto

przeto i Pierwiaſtek Sześcienny liczby 2, będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. Aby zaś poprawić ten pierwszy mniey dokładny Pierwiaſtek Sześcienny, podzielemy rożnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, to ieſt, $\frac{3}{64}$., przez kwadrat potróyny tego pierwſzego Pierwiaſtku to ieſt przez $\frac{75}{16}$, i wieloraz $\frac{1}{100}$, dodamy do Pierwiaſtku $\frac{5}{4}$; Summa $\frac{126}{100}$, będzie Pierwiaſtkiem bardziey przybliżonym. Jakoż Sześcian z $\frac{126}{100}$ ieſt. $2\frac{326}{1000000}$; a i to uchybienie możnaby ieſzcze zmnieyszyć podobnym iak wyżey ſpoſobem.

Niechby z liczby 3, trzeba wyciągnąć Pierwiaſtek ſześcienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa ſię zupełnie $\frac{1029}{343}$, a niewiele ſię różni od $\frac{1000}{343}$; a zatym Pierwiaſtek Sześcienny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$, a poprawuiąc to pierwſze uchybienie, Pierwiaſtek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie $\frac{3029}{2100}$.

48, Gdy ani licznik ani mianownik iakiego ułomku, nie ieſt Sześcianem; trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu,

 miano,

mianownik ſtał ſię Sześcianem; potym dopiero wyciąga ſię Pierwiaſtek z licznika, przez przybliżenie, a wyciągniony, dzieli ſię przez Pierwiaſtek zupełny mianownika. I tak chcąc wyciągnąć Pierwiaſtek ſześcienny z $\frac{1}{4}$; zamieniam ten ułomek na $\frac{2}{8}$; a wyciągnąwſzy z 2, przez przybliżenie Pierwiaſtek ſześcienny: 1,259. -- biorę iego połowę 0,629 ---; to ieſt: dzielę go przez Pierwiaſtek ſześcienny mianownika 8; Podobnie Pierwiaſtek Sześcienny z $\frac{5}{12}$, ten ſam ieſt, co i Pierwiaſtek Sześcienny z $\frac{90}{216}$; to ieſt $\frac{1}{6}$. Pierwiaſtku ſześciennego z 90.

ROZDZIAŁ III.

O Równoległościanach proſtokątnych (e).

49. *DEfin:* Gdy Bryła iaka zakończona ieſt ſześcią ścianami proſtokątnemi, taka Bryła nazywa ſię, *Rownoległo-*

(e) *Częſte używanie Równoległościanów proſtokątnych ieſt nam pobudką do mówienia o nich w ſzczegulności: tym bardziey, że przez to przysposobią ſię Uczniowie do zamieniania z większą łatwością innych nie proſtokątnych Rowno ległościanów na proſtokątne.*

ległościanem prostokątnym (Parallelopipedum Rectangulum).

50. *Twierdz.* 1. W każdym Równoległościanie prostokątnym, Sciany na przeciwko siebie stoiące, są równe i równoodległe; a każda z tych ścian w szczególności prostopadłą iest, do każdey z czterech innych ścian, które z nią spólny maią bok ieden.

Niech będzie ABCDEFGH, Równoległościan prostokątny; spolne dwóch ścian: GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłym iest do dwóch innych boków: BC, BA należących do tychże Scian, więc to przecięcie iest też prostopadłym i do płaszczyzny przechodzącey przez linii AB, BC, to iest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatym ABGH, BCFG, które przechodzą przez to spolne przecięcie GB, są do ściany ABCD, prostopadłe. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których spolnym przecięciem iest linia ED; a zatym cztery ściany Równoległościanu prostokątnego, są prostopadłe do tey ściany, z którą maią po iednym boku spolnym. *Tab. II. Fig. 4.*

Dowiedliśmy że liniia GB, prostopadłą iest do ściany ABCD. Podobnie do-

wieśćby można, że taż liniia ieſt proſtopadłą i do ściany GFEH; więc te obie ściany ſą proſtopadłe do iedney linii GB, a zatym ſą od ſiebie równoodległe.

Na oſtatek w Proſtokącie ABGH liniie przeciwne AB, GH ſą równe; iako też i liniie BC, FG, a zatym dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przyſtać do ſiebie.

51. *Uwaga.* Ponieważ w Równoległościanie proſtokątnym z czterech ścian otaczaiących ten Równoległościan, każda ma ieden bok ſpolny z bokiem iedney ściany z dwóch pozoſtałych; przeto można wyſtawić ſobie *rodzenie ſię* (generatio albo formatio) Równoległościanu proſtokątnego, w ſposob naſtępuiący.

Niech będzie Proſtokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszyſtkich wyſtawione ſą proſtopadłe do iego płaſzczyzny wſzyſtkie równe. Niech ten Proſtokąt poſuwa ſię równoodlegle od pierwſzego ſwego położenia, i tak, aby wierzchołki kątów iego wzdłuż liniy proſtopadłych wznoſiły ſię. Mieyſce to, które takowym poſuwaniem ſię

przey-

przeydzie Prostokąt, będzie Równoległościanem prostokątnym.

52. *Defin:* Równoległościan prostokątny, którego wszystkie sciany są kwadratami, nazywamy *Sześcianem*, albo z Lacińskiego, *Kubusem*.

Sześcian więc, iest to Bryła zakończona sześcią kwadratami. Wypływa zaś z Twierdzenia poprzedzaiącego, że te 6. kwadratów, są równe, że każde z nich dwa, na przeciwko siebie stoiące, są równoodległe, i że cztery z tych kwadratów wspieraiące się na czterech bokach kwadratu iednego z dwóch kwadratów pozostałych, są do tego kwadratu prostopadłe.

Wystawiwszy sobie Równoległościan prostokątny, iako zbudowany na iedney z ścian swoich, prostopadła spuszczona na tę ścianę, od punktu któregokolwiek sciany przeciwney, nazywa się *wysokością* tego Równoległościanu. Ta zaś wysokość równa iest spolnemu przecięciu dwóch ścian zbudowanych na dwóch przyległych sobie bokach podstawy.

53. *Twier:*

53, *Twierdz.* 2. Gdy podſtawy dwóch Równoległościanów mogą przyſtać do ſiebie, a ich wysokości ſą równe, te dwa Równoległościany, mogą też przyſtać do ſiebie, to ieſt nie różnią ſię od ſiebie tylko mieyſcem.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany tych dwóch Równoległościanów, podobnie położone, mogą przyſtać do ſiebie; wſzyſtkie też tych Równoległościanów kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów proſtych, a zatym wszyſtkie te kąty bryłowe mogą przyſtać do ſiebie. Przenioszſzy tedy myślą ieden z tych Równoległościanów, tak, aby ieden z kątów iego bryłowych, przyſtał do iednego z kątów bryłowych Równoległościanu drugiego, i aby ściany pierwſzego kąta, które mogą przyſtać do ścian drugiego, w ſamey rzeczy do niego przyſtały, wſzytkie końce krawędzi pierwſzego kąta, przyſtaną do końców krawędzi odpowiadaiących przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwſzego Równoległościanu, które ſą przy końcach tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego Równoległościanu, będące przy końcakch tychże ścian odpowiadaiących

pierwszym; zatym i te kąty bryłowe przyſtaną iedne do drugich.

54. *Wniosek.* Podzieliwszy wyſokość iakiego Równoległościanu proſtokątnego na pewną liczbę części równych, a przez te wszyſtkie punkta podziału przeciągnąwſzy płaszczyzny równoodległe od podſtawy; Równoległościan podzielony będzie na tyle Równoległościanów mnieyszych, które przyſtać do ſiebie mogą, na ile części była podzielona wysokość; będą albowiem miały te wszyſtkie Równoległościany mnieysze, iednakową wyſokość, a takie podſtawy, z których każda przyſtać może do podſtawy wielkiego Równoległościanu.

55. *Twierdz;* 3. Dwa Równoległościany proſtokątne, wyſtawione na teyże ſamey podſtawie, lub na podſtawach mogących przyſtać do ſiebie, tak ſię maią ieden do drugiego, iak ich wysokości.

Dowodz: 1. Gdyby wyſokość iednego, Równoległościanu, była dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od wysokości drugiego, pierwszy Równoległościan, mógłby ſię podzielić na 2, 3, 4, i t. d.

i t. d. Równoległościany mogące przyſtać do drugiego; a zatym ten pierwszy Równoległościan byłby też większy od drugiego, 2, 3, 4, i t. d. razy. Co przyſtosować można, i w innych przypadkach, gdzieby tylko wyſokość iednego Równoległościanu zawierała w ſobie zupełnie wyſokość drugiego.

2. Gdyby zaś wysokość iednego Rownoległościanu zawierała nap. 3. takich części; iakich 5 zawiera wysokośc drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwſzą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych części, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podſtaw, podzielilibyśmy pierwszy Równoległościan na 3, a drugi na 5. Równoległościanów iednakowey wysokości, i których podſtawy przyſtaćby mogły do ſiebie; a zatym pierwszy Równoległościan takby ſię miał do drugiego iak 3, do 5, to ieſt iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to ſłuży i do innego iakiegokolwiek ſtosunku.

Na koniec, to, co ſię powiedziało w przypadkach ſpołmiernych, przyſtosować można i do przypadków nie ſpołmier-

miernych, tak iakośmy uczynili mówiąc o figurach płaſkich, w Części 1.

Jakoż niech będą AB, CD wysokości dwóch Równoległościanów proſtokątnych, zbudowanych na teyże ſamey podſtawie, albo na podſtawach mogących do ſiebie przyſtać; i niech te wyſokości będą nieſpołmierne; wszelako dwa takie Rownoległościany mieć ſię do ſiebie będą, iak ich wysokości. *Tab. II. Fig: 5.*

Gdyby albowiem ſtoſunek tych dwóch Równoległościanów nie był równy ſtoſunkowi ich wysokości, tedy iedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do uczynienia tey równości ſtosunków. Niechże więc ieżeli to być może, ſtosunek pierwſzego Równoległościanu, do drugiego, będzie równy ſtoſunkowi linii AE, (większey od AB) do CD.

Podzielmy liniią CD na pewną liczbę części równych mnieyszych iednak od różnicy BE, i przenieśmy iednę z tych części na liniią AB; tyle razy, ile można; oſtatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniozłszy daley ku E, iednę ieſzcze taką część, punkt podziału padnie między B i E, nap. w F.

Ro-

Rownoległościany maiące iednakowe podstawy, a wysokości spółmierne CD, i AF, będą do siebie iak te wysokości CD i AF.

Aże (przez przypuszczenie) Równoległościan, którego wysokością iest AB, tak się ma do Równoległościanu, którego wysokością iest CD, iak się ma liniia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie stosunków) Rownoległościany, których wysokościami są AB, i AF, miałyby się do siebie, iak liniie AE, i AF, Że zaś pierwszy poprzednik mnieyszy iest od swego następnika, a drugi poprzednik większy od swego następnika, więc proporcya ta niema mieysca, a zatym stosunek Równoległościanów, których AB, i CD, są wysokościami, nie iest różnym od stosunku tychże wysokości.

To samo w krótkości tak się wyraża: Niech będą oznaczone przez R.AB, R.AF, R.CD, Równoległościany maiące iednakowe podstawy, wysokości zaś: AB AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcyą:

R. AB : R. CD = AE : CD.

tedy ponieważ iest ; - - R. CD : R. AF = CD : AF.

byćby powinno - - R. AB : R. AF = AE : AF.

Ta zaś oſtatnia proporcya utrzymać ſię nie może, więc ani pierwſza.

56. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany, maiące iednakowe wysokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy.

Przenieśmy ieden z tych Równoległościanów, tak, aby podſtawa iego ſtykała ſię w wierzchołku ſpolnym, z drugą podſtawą. Niech ABCD będzie iedną z tych podſtaw, a drugą: EBGF. Dopełniymy Proſtokąta, CBGH przedłużywszy boki, DC, FG, aż do ich ſpolnego przecięcia, w punkcie H; i wyſtawmy ſobie wmyśli Równoległościan trzeci ſtoiący na podſtawie CBGH, dawszy mu wyſokość równą wysokości, iednakowey dwóch danych Równoległościanów. Równoległościan, którego podſtawa ieſt: ABCD, i ten, którego podſtawa ieſt: CBGH, wyſtawuiąc ie ſobie iak gdyby miały za podſtawę proſtokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia CB, a drugim, wysokość ſpolna obydwóch danych Równoległościanów; te mowię Równoległościany ſą do ſiebie iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Proſtokąty ABCD i CBGH. *Tab: II. Fig. 6.*

Podobnie Równoległościany, których, CBGH, i BEFG. ſą podſtawami, uważane,

ne, iak gdyby miały za podstawę Prostokąt, którego iednym, bokiem byłaby liniia BG, a drugim spolna wysokość dwóch danych Równoległościanów są także do siebie, iak ich wysokości, BC, BE, albo iak Prostokąt, CBGH, do Prostokąta BEFG.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległościan, którego podstawą iest ABCD, tak się ma do Równoległościanu, którego podstawą iest BEFG, iak się ma pierwsza podstawa do drugiey.

Króccy to samo.

Niech Równoległościany, których podstawami są Prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami następuiącemi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya,
R. ABCD : R. CBGH = ABCD : CBGH.

2. proporcya;
R. CBGH : R. BEFG = CBGH : BEFG.

więc - - - - -

R. ABCD : R. BEFG = ABCD : BEFG.

57. *Wnio-*

57. *Wniosek* 1. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią równe tak wysokości, iak i podstawy, są równe; także, ieżeli równe dwa Równoległościany prostokątne, maią równe podstawy, równe będą i ich wysokości; albo ieżeli równe maią wysokości, równe będą i ich podstawy.

58. *Wniosek* 2. Można zawsze zamienić, albo w myśli zamienionym sobie wystawić Równoległościan ieden prostokątny, na drugi, iednakową z nim wysokość maiący, a któryby za podstawę miał Prostokąt, z iednym bokiem danym; to się zaś stanie, zamieniaiąc podstawę Równoległościanu danego, na Prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe; i wzaiemnie, ieżeli dwa Równoległościany są równe, będą podstawy ich, w stosunku odwrótnym ich wysokości.

Niech będzie ABCD podstawa, a BI wysokość Równoległościanu iednego *Tab. II. Fig. 6.*

Prosto-

proſtokątnego ; drugiego zaś Równoległościanu niech będzie podſtawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podſtawami y wysokościami proporcya:

ABCD : BEFG = BL : BI, tedy te Równoległościany będą równe.

Wyſtawmy ſobie drugi Równoległościan, iakoby zamieniony na inny teyże ſamey wysokości BL, a maiący za ieden bok ſwoiey podſtawy, bok nap: BC, należący do podſtawy pierwſzego Równoległościanu, i niech będzie tego nowego Równoległościanu podſtawa CBMN.

Będzie zatym podſtawa ABCD do podſtawy BEFG. iak AB do BM ; a żeśmy też przypuścili ABCD : BEFG = BL: BI, więc będzie AB : BM = BL: BI, a zatym Proſtokąt maiący za boki, AB, BI. równy będzie Proſtokątowi maiącemu za boki : BM, BL: Ze zaś pierwszy i trzeci Równoległościan maią za podſtawy te dwa równe Proſtokąty, i ſpolną przytym maią wysokość BC, więc ſą ſobie równe. Aże trzeci Równoległościan równy ieſt drugiemu, więc i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech

2. Niech Równoległościan, którego ABCD iest podstawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległościanowi, którego podstawą iest BEFG: a wysokością BL; idzie zatym że, - - ABCD: BEFG = BL: BI.

Zrobmy to samo co wyżey wykreślenie.

Uważaiąc pierwszy i trzeci Równoległościan, iako maiące za wysokość spolną, BC, będzie pierwszy do trzeciego iak Prostokąt AB×BI do Prost: BM×BL. Aże te dwa Równoległościany są (przez przypuszczenie, albo wykreślenie) równe drugiemu, więc i sobie są równe, więc AB×BI = BM×BL; a zatym AB: BM = BL: BI. Że zaś AB: BM = ABCD : CBMN = ABCD : BEFG; więc ABCD: BEFG = BL : BI.

60. *Wniosek.* Z tego wszystkiego co się powiedziało, wynika sposob znalezienia dwóch liniy, któreby były do siebie w stosunku dwóch Równoległościanów zawieraiących boki dane.

Przykład. Maiąc dany Sześcian i Równoległościan prostokątny, znaleść liniią taką, aby stosunek Sześcianu do Ró- wnole-

wnoległościanu równy był stosunkowi boku Sześcianu do tey linii.

Niech będzie S bok Sześcianu, P,Q;R, boki trzy Równoległościanu. Zamieńmy naprzod Prostokąt, którego bokami są P, i Q na inny, któryby miał za bok ieden, bok Sześcianu; to iest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, P, i Q; Niech będzie L, tą czwartą proporcyonalną. Równoległościan dany, równy będzie innemu, któryby miał za boki: S,L,R; a zatym stosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do Prostokąta $L \times R$. Zamieńmy znowu ten drugi Równoległościan równy danemu, na inny, któryby znowu miał S za bok ieden, to iest szukaymy czwartey proporcyonalney do S, L, i R. Niech będzie M, tą czwartą proporcyonalną: Równoległościan drugi, a zatym i pierwszy dany, iemu równy, równać się będzie trzeciemu, któryby miał za boki: S, S, M; więc stosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać się będzie stosunkowi kwadratu S^2 do prostokąta $S \times M$, to iest stosunkowi S, do M.

Aby tedy znaleść w liniiach, stosunek Sześcianu do Równoległościanu, prosto- kątne-

kątnego, trzeba 1°. do boku Sześcianu, i do dwóch boków Równoległościanu ſzukać czwartey proporcyonalney; 2°. trzeba znowu do tegoż boku trzeciego, Równoległościanu, i do czwartey proporcyonalney dopiero znalezioney, ſzukać inney czwartey proporcyonalney; a ſtoſunek boku Sześcianu, do tey oſtatniey linii, równy będzie ſtoſunkowi Sześcianu do Równoległościanu.

Jdzie zatym, że ieżeli mamy dwa Równoległościany proſtokątne, będziemy mogli wyrazić w liniiach ich ſtoſunek, ſzukaiąc w liniach ſtoſunku tychże Równoległościanòw do iakiego Sześcianu; wziąwſzy albowiem bok tego Sześcianu, za poprzednika, każdego z tych ſtoſunków; ſtoſunek ich naſtępników, wyrażać będzie ſtoſunek w liniiach, tych dwóch Równoległościanòw.

61. *Uwaga*. Wſzyſtko to, co ſię powiedziało o przyrównywaniu, albo mierze Geometryczney Równoległościanów proſtokątnych, zgadza ſię zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce o przyrównywaniu liczebnym Równoległościanów.

Przykł. Niech iedność wyraża bok Sześcianu wziętego zą miarę do przyrównywania; a niech boki Równoległościanu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawieraią ten bok Sześcianu kilka razy oznaczonemi przez liczby nap. 5, 7, i 9. Czwarta proporcyonalna do boku Sześcianu, i do dwóch pierwſzych boków Równoległościanu wyrazi ſię przez liczbę 35, to ieſt zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35; czwartą zaś drugą proporcyonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległościanu i do pierwſzey czwartey proporcyonalney, wyrazi liczba 315; to ieſt zawierać ta będzie bok ſześcianu, razy 315. A zatym Równoległościan, zawierać będzie w ſobie Sześcian razy 315; to ieſt, wziąwſzy Sześcian za iedność albo ſpolną miarę; ten Równoległościan wyrazi ſię przez liczbę 315, która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5. 7, i 9.

62. *Defin.* Gdy cztery takie mamy liniie, że ſtoſunki, pierwſzey do drugiey, drugiey do trzeciey, trzeciey do czwartey ſą równe, o takich liniiach mowi ſię, że ſą *ciągło* (continuè) proporcyonalne.

Przykłady

Przykłady liczebne: Cztery liczby: 1,2,4,8, nazywaią ſię ciągło proporcyonalnemi, a cztery liniie, ktoreby tak ſię do ſiebie miały, iak te cztery liczby nazywałyby ſię też ciągło proporcyonalnemi. Toż mowić i o liczbach, 8,12,18,27, z ktorych każda zawiera w ſobie, poprzedzaiącą ieden raz i poł, i t. d.

Stoſunek pierwſzey z tych linii, do czwartey, ſkłada ſię z ſtoſunku, pierwſzey do drugiey, drugiey do trzeciey, i trzeciey do czwartey (a to przez definicyą ſtoſunku ſkładanego). Ze zaś wſzyſtkie te ſzczegulne ſtoſunki ſą rowne, więc ſtoſunek pierwſzey tey linii do czwartey, ſkłada ſię z 3 ſtoſunków rownych, ma zaś nazwiſko ſtoſunku *troymnożnego* (ratio triplicata) i pierwſza ta liniia do czwartey, będzie w ſtoſunku troymnożnym.

63. *Przyſtoſowanie*. Niechby Rownoległościan, który wymierzać mamy przez Sześcian wzięty za iedność, był i on ſam Sześcianem.

Niech będzie AB bok Sześcianu maiącego ſłużyć za miarę; AC bok Sześcianu który wymierzyć mamy. Szukaymy do AB, i AC, trzeciey proporcyonalney AE *Tab. II. Fig. 7.*

 (kreśląc

(kreśląc Tróykąt proſtokątny ABC, maiący, AB za iedno ramie kąta proſtego, a AC za przeciwproſtkątną; i wyſtawuiąc do linii AC, w punkcie C, proſtopadłą CE, aż do iey ſpotkania ſię w E, z liniią AB przedłużoną) Szukaymy daley do AB,AC,AE, czwartey proporcyonalney, AF) wyprowadzaiąc od punktu E linii AE, proſtopadłą EF, aż do iey ſpotkania ſię w punkcie F z linią AC przedłużoną) Pierwſzy Sześcian, wzięty za miarę, tak ſię będzie miał do Sześcianu, który wymierzać przypada, iak liniia AB, do linii AF; to ieſt: iak liniia pierwſza do czwartey z liniy ciągło proporcyonalnych; z których pierwſzych dwòch iedna ieſt bokiem Sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem Sześcianu wziętego do wymierzenia; a zatym ſtoſunek pierwſzego Sześcianu do drugiego ieſt tróymnożnym ſtoſunku ich boków.

I tak, ieżeli bok Sześcianu iakiego trzy razy zawiera w ſobie bok Sześcianu wziętego za miarę, Sześcian pierwſzy będzie do drugięgo, iak $3 \times 3 \times 3$ do 1. albo iak 27, do 1; to ieſt ieżeli liniia AC zawiera w ſobie razy trzy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie trzy razy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie razy 3

liniią

liniią AC, a zatym 9 razy liniią AB, a linia AF zawierać będzie 3 razy liniią AE, a tym samym 27 razy liniią AB.

64. *Wzaiemnie.* Gdy trzeba znaleść Sześcian, któryby do drugiego był w stosunku danym, i takim, któryby się równał stosunkowi boku Sześcianu tego drugiego, do linii daney; bok Sześcianu, którego szukamy, ma być drugą liniią z czterech ciągło proporcyonalnych, między któremi pierwsza z czwartą, są w danym stosunku; to iest: bok ten szukany, ma być liniią pierwszą z dwóch średnich ciągło proporcyonalnych między pierwszą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może być rozwiązane przez Geometryą początkową, chyba trefunkiem przez doświadczanie i szukanie niepewne; do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynaymniey z liniy krzywych, nazwanych *przecięciami kojnicznemi* (sectiones conicæ) o których się potym namieni. I toć to zagadnienie o znalezieniu dwóch średnich proporcyonalnych, pierwszym powodem być musiało Geometrom, do uważania, tych liniy krzywych dopiero wspomnionych, i do uczynienia pierwszego

go kroku w wyższey Geometryi. Gdy się w *Delos* radzono Wyroczni, coby za sposób był ziednania Bogów zagniewanych, i odwrócenią zarazy powietrza niszczącego Państwo Attyckie; miał się dać głos słyszeć: aby *dwumnożono ołtarze* (duplicentur Altaria) Po wielu niepożytecznych zawodach, postrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleść bok Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak drugi wzięty za spolną miarę; to iest: iż trzeba było wynaleść pierwszą z dwóch średnich Geometrycznych, między dwiema liniiami, z których iedna dwa razy w sobie zamykałaby drugą.

65. W Arytmetyce; gdy stosunek dany, iest stosunkiem liczby iedney Sześcienney, do drugiey także Sześcienney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak nap: gdyby dwa Sześciany miały być do siebie, iak 1. do 8; albo iak 1 do 27, albo iak 8 do 27. i t. d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1. do 2, albo iak 1. do 3, albo iak 2, do 3. i t.d.

Ale gdy stosunek dany nie iest stosunkiem dwóch liczb Sześiennych, rozwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy Sześcian ieden, ma

ma być dwa razy tak wielki, iak drugi, wziąwſzy bok tego drugiego, za iedność, bok pierwſzego powinienby być wyrażony przez liczbę taką, którey Sześcianem, ieſt 2; a zatym pierwiaſtek Sześcienny, liczby 2, wyrażałby ten bok; Pierwiaſtek zaś ten przybliżony, ieſt 1,26 to ieſt bok mnieyſzego Sześcianu, tak by ſię miał do boku Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak 1, do 1,26, albo iak 100, do 126. albo ieſzcze dokładniey iak 23, do 29.

66. *Uwaga*. Gdy ſtoſunek dwóch liniy ieſt dany; dany ieſt tym ſamym i ſtoſunek ich Sześcianów.

Ták albowiem mieć ſię będą do ſiebie te Sześciany, iak liniia pierwſza do czwartey ciągło proporcyonalney, wziąwſzy za pierwſze dwa wyrazy tey proporcyi dwie liniie których ſtoſunek ieſt dany.

Zkąd wypada wnioſek naſtępuiący:

67. Gdy cztery liniie ſą w proporcyi, ich Sześciany w proporcyi też będą; to ieſt; gdy ſtoſunek dwóch pierwſzych liniy równa ſię ſtoſunkowi dwóch drugich; ſtoſunek też Sześcianów z dwóch

pier-

pierwſzych liniy, równać ſię będzie ſtoſunkowi Sześcianów z dwóch drugich liniy.

W Arytmetyce: cztery licz: 2, 3, 8, 12 ſkładaią proporcyą
ich Sześciany: - - 8, 27, 512, 1728, ſkładaią także proporcyą.

68 *Uwaga.* Podanie zamknięte w tym wnioſku, ieſt tylko wyſzczegulnieniem podania naſtępuiącego:

Niech będą trzy iakiekolwiek proporcye, i cztery takie Równoległościany proſtokątne; aby krawędzie pierwſzego Równoległościanu, były trzema poprzednikami trzech pierwſzych ſtoſunków, krawędzie drugiego, trzema naſtępnikami tychże trzech pierwſzych ſtoſunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami, trzech drugich ſtoſunków, a krawędzie czwartego, trzema naſtępnikami tychże trzech drugich ſtoſunków; ſtoſunek pierwſzych dwóch Równoległościanów równy będzie ſtoſunkowi dwóch oſtatnich.

Trzeba nayprzod to podanie obiaśnić na przykładach liczebnych.

W ogul

W ogulności zaś niech będą trzy iakiekolwiek proporcye: A : B = C : D.

a : b = c : d.

a : *b* = *c* : *d*.

Zamieńmy stosunek A do B na inny b do czwartey linii *E*: Zamienmy podobnie i stosunek C do D na inny d, do czwartey linii *e*.

Będą podstawy drugiego i czwartego Równoległościanu równe prostokątom B × b, i, D × d; a zatym podstawy dwóch pierwszych Równoległościanów będą się miały, do siebie iak a do *E*, a podstawy zaś dwóch drugich Równoległościanów będą się miały do siebie iak c do *e*.

Aże przez przypuszczenie i wykreślenie stosunki; A do B, b do *E*, C do D, d do *e*, są wszystkie równe, - -
więc - - b : *E* = d : *e*.

Ze zaś - a : b = c : d

więc a : *E* = c : *e*.

A zatym stosunek podstaw Równoległościanów dwóch pierwszych, równy iest

ieſt ſtoſunkowi Równoległościanów dwóch drugich.

Jeſt też z przypuſzczenia; -

- - $a : b = c : d$

więc Proſtokąty aa, Eb, cc, ed ſkładą proporcyą; a zatym cztery Równoległościany; ktòreby te Proſtokąty miały za podſtawy, i z których dwa pierwſze miałyby ſpolną wyſokość A, dwa zaś drugie wyſokość C, byłyby także z ſobą w proporcyi, Aże pierwſzy z tych Równoległościanów miałby za krawędzie trzy liniie: A, a, a, drugi zaś równałby ſię temu, ktòryby miał za krawędzie trzy liniie: B, b, b: a to dla tego, że ſą równe Proſtokąty: B × b i A × E) trzeci z tych Równoległościanów miałby za krawędzie, trzy liniie: C, c, c, a czwarty równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie, trzy liniie: D, d, d; więc te cztery Równoległościany byłyby w proporcyi.

RO-

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nie proſtokątnych.

69. DEfin: Bryła zakończona 6 ścianami parzyſto równoległemi, nazywa ſię *Równoległościanem* a zatym Równoległościany proſtokątne, o których w Rozdziale poprzedzaiącym mowa była, ſą pewnym gatunkiem Równoległościanów.

70. *Twierdz.* 1. W Równoległościanie, wſzyſtkie ściany ſą Równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne, mogą przyſtać do ſiebie.

Niech będzie Równoległościan ABCDEFGH; wſzyſtkie iego ściany ſą Równoległobokami, a ściany przeciwne nap: ABCD, EFGH mogą do ſiebie przyſtać. *Tab. III Fig. 1*

Dowodz: Ponieważ płaſzczyzny równoodległe ABCD, GHFE, ſą przecięte trzecią płaſzczyzną BGFC, więc ich ſpólne przecięcia BC, FG z tą płaſzczyzną, ſą równoodległe. Takoż pokazać można, że liniie HE, GF ſą równoodległe, i liniie: HG, EF równoodległe; a zatym

że

że ściana HGFE ieſt Równoległobokiem. Podobnie i wſzyſtkie inne ściany ſą także Równoległobokami.

W ſzczególności zaś, liniie: BA, GH, i liniie BC, GE, ſą od ſiebie równoodległemi; więc równe ſą kąty ABC, HGF. Aże te liniie BA, GF, i BC, GF ſą równe, więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przyſtać do ſiebie. Toż mowić o każdey inney parze ścian przeciwnych,

71. Ztąd też wyſtawić ſobie można każdy Równoległościan, iakoby utworzył ſię naſtępuiącym ſpoſobem:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok; a od iednego z iego wierzchołków wyciągniymy liniią czyniącą z iego płaſzczyzną, kąt iakikolwiek; wyciągniymy potym i przez drugie wierzchołki, liniie równoodległe od pierwſzey, i zrobmy wſzyſtkie ſobie równemi. Niech nakoniec ten Równoległobok poſuwa ſię równoodlegle od pierwſzego ſwego położenia, i niech wierzchołki iego nie ſchodzą nigdy z liniy równoodległych, mieyſce od Rownoległoboków, tym ſpoſobem przebyte, będzie Rownoległościanem.

72. *Twierdz:*

72. *Twierdz. 2.* Dwa Równoległościany mogą przyſtać do ſiebie, gdy i wſzyſtkie ich odpowiadaiące ſobie ściany przyſtać do ſiebie mogą, i gdy kąty ich bryłowe także ſobie odpowiadaiące, robią ſię z kątów równych należących do tychże ścian.

Niech będą dwa Równoległościany: AF, af, których wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie w iednym i w drugim Równoległościanie, mogą przyſtać do ſiebie, i których kąty bryłowe także ſobie odpowiadaiące nap: A, i a, robią ſię z równych kątów tychże ścian; te dwa Równoległościany przyſtać do ſiebie mogą. *Tab: III Fig: 10 i 20.*

Dowodz: Ponieważ kąty bryłowe, A, i a, robią ſię z równych względem ſiebie kątów płaſkich, więc przyſtać do ſiebie mogą. Przenioſzſzy tedy Równoległościan af, tak aby kąt bryłowy a, przyſtał w rzeczy ſamey do kąta bryłowego A; ponieważ i kąty płaſkie, z których ſię te bryłowe robią, przyſtaią iedne do drugich ſobie równych; a linie ab, ad, ah, ſą równe względem liniy AB, AD, AH; więc punkta: b. d. h. przyſtaną do punktów: B,D,H, i ściany także

że czyniące dwa kąty bryłowe a, i A, przyſtaną iedne do drugich; a zatym i punkta: c, g, e, przyſtaną do punktów odpowiadaiących ſobie: C, G, E; a wſzczególności liniie: bc, bg, przyſtaną do liniy: BC, BG. Więc i płaſzczyzna przechodząca przez liniie: bc, bg. leżeć będzie na płaſzczyznie przechodzącey przez liniie BC, BG. Że zaś przypuściliśmy iż ściana bcfg, przyſtać może do ściany BCFG, więc punkt f, przyſtanie do punktu F.

Tymże ſpoſobem okazać można, że i wſzyſtkie inne ściany, i kąty Równoległościanu af, przenieſionego, przyſtaną do innych ścian i kątów Równoległościanu AF, a zatym te dwa Równoległościany przyſtać do ſiebie mogą.

73. *Uwaga.* Tymże cale ſpoſobem dowodzi ſię, że dwie iakiekolwiek Bryły, przyſtać mogą do ſiebie, gdy wſzyſtkie kąty ich bryłowe odpowiadaiące ſobie, przyſtać także do ſiebie mogą, i gdy ściany iedney Bryły przyſtać mogą do ścian odpowiadaiących w drugiey Bryle.

74. *Definicye.* Uważaiąc Równoległościan iakoby zbudowany na iedney z ścian ſwoich, ta ściana nazywa ſię, *podſtawą* iego; a proſtopadła od punktu którégokolwiek ściany przeciwney, do tey ſpu-

ſpuſzczona, nazywa ſię *wyſokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podſtawy, ſą do niey proſtopodłemi, taki Rownoległościan nazywa ſię *proſtym* (Parallelopipedum rectum) Równoległościany proſtokątne, ſą gatunkiem Równoległościanów proſtych, w których podſtawa nawet ſama ieſt proſtokątem.

75. *Twierdz.* 3. Dwa Równoległościany równe ſą w *bryłowatości* (ſoliditas) gdy maią iednakową wyſokość, i na teyże ſamey ſą zbudowane podſtawie, a dwie ich ściany, na iedney płaſzczyznie znayduiące ſię, ſtoią na tymże ſamym boku podſtawy.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE. i ACLI. zbudowane na teyże ſamey podſtawie AC; i niech dwie ich ściany, AG, AL znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie; te dwa Równoległościany, ſą równe w bryłowatości. *Tab. III Fig.* 3

Dowodz. Dwie Bryły: ADIEHM, BCKFGL, maią takie wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie, iż iedne do drugich przyſtać mogą; wſzyſtkie podobnie kąty

ich

ich bryłowe przyſtać mogą do ſiebie. Jakoż Tróykąt HAM, może przyſtać do Tróykąta GBL, a wſzczegulności kąty HAM, GBL, ſą równe. Równoległobok HADE przyſtać może do Równoległoboku: GBCF ſobie przeciwnego, w pierwſzym Równoległościanie, a wſzczegulności kąty: HAD, GBC, ſą równe; Równoległoboki także: MADI, LBCK przeciwne ſobie, w drugim Równoległościanie, mogą do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności kąty: MAD, LBC, ſą równe, więc kąty bryłowe A,B, i ściany tych kątów mogą przyſtać do ſiebie. Toż mowić i o wſzyſtkich innych kątach bryłowych, i o wſzyſtkich innych, tych dwóch Brył, ścianach. Zaczym te dwie Bryły przyſtać mogą do ſiebie. i ſą równe ſobie, w bryłowatości. Aże od całey Bryły ACLE odiąwſzy pierwſzą z Brył wyżey wyrażonych, ADIEHM, zoſtaie ſię Równoległościan ACLI, a odiąwſzy od teyże całey Bryły ACLE, drugą Bryłę BCKFGL, zoſtaie ſię Równoległościan ACGE; więc te dwa Równoległościany ſą równe. (f)

76.

(f) *To dowodzenie ieſt ogulne, i rozciąga ſię do iakiegożkolwiek położenia linii MI; czyliby punkt M przypadał na punkt*

76. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany są równe w bryłowatości, gdy iednaką maią wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, chociaż żadna z ich ścian stoiących na bokach podstawy, nie będzie na teyże samey płaszczyznie.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, i ACLI, na teyże samey podstawie AC, z iednaką wysokością; i niech inne ich ściany na odmiennych znayduią się płaszczyznach; te dwa Równoległościany są równe. *Tab. III Fig. 4.*

Dowodz. Przedłużmy liniie KI, HE tak daleko, aż się zniydą z sobą w punkcie O. Niech ieszcze i liniia LM, przedłużona, przecina HE, w N; a liniia GF także przedłużona niech przecina IK w P i niech Q będzie punktem przecięcia liniy GF, LM, albo ich przedłużeń.

Pociągniymy liniie AN, DO, BQ, CP.

Bryła ACQO, będzie Równoległościanem, czego bardzo łatwo dowieść można.

G, czyliby się znaydował między G i H, czyli nakoniec byłby na linii HG przedłużoney,

Równoległościan ACQO, ma tę ſamę co tamte dwa, podſtawę AC.

Ma ścianę AO na płaſzczyznie ściany AE, należącey do Równoległościanu, ACGE, więc temu Równoległościanowi będzie równy.

Ma zaś oprócz tego ścianę AQ na płaſzczyznie ściany AL, należącey do Równoległościanu ACLI, więc będzie równy i temu drugiemu Równoległościanowi.

Więc Rownoległościan ACQO równy ieſt tak Równoległościanowi ACGE, iako i Równoległościanowi ACLI; a zatym i te dwa Równoległościany ſą też ſobie równe,

77 *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy iednaką maią wyſokość i równe podſtawy, z iednym ſpolnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże ſamym boku ſpolnym wyſtawione, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Tb. III Fig. 5. Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, ICOQ iednakiey wyſokości; a podſtawy ich równe AC, IC, niech maią bok

bok ſpolny CD, na którym wyſtawione ſą dwie ściany DF, DP na teyże ſamey płaſzczyznie znayduiące ſię, te dwa Równoległościany ſą równe.

Wykreśl. Przez punkta I, i L, poprowadźmy na płaſzczyznie AG, czyli AO, liniie JN, LM, równoodległe od AH, albo BG, i niech te równoodległe ſpotykaią w N i M, liniią HO. Pociągniymy i liniie EN, FM. Bryła JCME będzie też Równoległościanem.

Dowodz: Równoległościan: ICME, ma też ſamę podſtawę JC, i tę ſamę wyſokość, co i Równoległościan JCOQ, a zatym ſą ſobie równe.

Tenże Równoległościan JCME, i Równoległościan ACGE, uważaiąc w nich ścianę ſpolną DF, iak podſtawę, maią też iednaką wyſokość, a zatym ſą ſobie równe. Więc Równoległościan JCME, równy ieſt tak iednemu, iak i drugiemu Równoległościanowi: ACGE, i JCOQ, a zatym i te dwa Równoległościany ſą równe.

78. *Twierdz:* 6. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy maią iednaką wyſokość, *Tab. III Fig.* 5

gdy ich podſtawy maiące bok ieden ſpolny, ſą równe.

Niech we dwóch Równoległościanach iednakiey wyſokości będą dwie podſtawy: AC, i IC równe, i maiące ſpolny bok CD; te dwa Rownoległościany będą równe.

Wykreśl. Na podſtawie IC, iednego z tych Równoległościanòw, który nazwiemy pierwſzym, poſtawmy trzeci Równoległościan teyże ſamey wyſokości, tak, aby ściana iego ſtoiąca na boku CD, znaydowała ſię na płaſzczyznie ściany drugiego Równoległościanu, ſtoiącey na tymże boku;

Ten trzeci Równoległościan, iako maiący z pierwſzym ſpolną podſtawę i wyſokość, będzie mu równy. Tenże trzeci Równoległościan, będzie równy, i drugiemu; bo maią równe podſtawy: IC, AC, z ſpolnym bokiem CD, i ściany ich ſtoiące na boku CD, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Więc ten trzeci Równoległościan równy ieſt tak pierwſzemu iak i drugiemu, a zatym i one ſobie równe będą.

Wſzcze-

Wszczegulności. Równoległościan każdy równy ieſt Równoległościanowi proſtokątnemu, który ma tę ſamę, co i tamten wyſokość, podſtawę równą podſtawie iego, i bok ieden ſpolny obydwom podſtawom.

79. Zkąd wynika, że cokolwiek ſię powiedziało o Równoległościanach proſtokątnych, wſzyſtko to do iakichkolwiek innych można przyſtoſować; kładąc zamiaſt każdego z nich, Równoległościan proſtokątny, teyże ſamey wyſokości, i podſtawy równey, a maiącey bok ieden ſpolny z podſtawami Równoległościanów nie proſtokątnych. I tak.

1. Dwa Równoległościany, maiące rowne podſtawy i wyſokości, ſą równe; bo Równoległościany proſtokątne iednakiey wyſokości, i maiące ztamtemi Równoległościanami równe podſtawy, a w nich ſpolny bok ieden, ſą równe.

2. Dwa Równoległościany ſą też równe, których podſtawy ſą w ſtoſunku odwrótnym, ich wysokości.

3. Dwa Równoległościany, których bryłowatości ſą równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrótnym ich wyſokości.

4.

4. Wszyſtko to, co ſię powiedziało o zamienianiu ſtoſunku dwoch Równoległościanów proſtokątnych, na ſtoſunek dwóch liniy; i o mierze liczebney dwóch Równoległościanó w proſtokątnych, przyſtoſować można do miary Równoległościanów nie proſtokątnych; używaiąc do tego, boku iednego podſtawy, wyſokości iey względem tego boku, i wyſokości Równoległościanu.

80. *Przeſtroga* Gdyby ściſłe i prawdziwe Geometryczne dowodzenie wyżey położone przytrudnym ſię zdawało uczniom do poięcia, mimo wyſtawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papieru wyrobionych; można im to będzie łatwiey do poięcia podać w ſpoſob naſtępuiący.

Niechay dwa Równoległościany z równemi podſtawami i wyſokościami ſtoią na teyże ſamey płaſzczyznie. Niech inna iakakolwiek płaſzczyzna równoodległa od pierwſzey, przecina te dwa Równoległościany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podſtawom, a zatym i ſobie równe będą; i gdziekolwiek te dwa Równoległościany przetniemy przez płaſzczyznę równoodległą od ich

pod-

podſtaw, równe zawſze będą te przecięcia. Zadney więc niemaſz przyczyny, dla ktoreyby ieden z tych Rownoległościanow nie miał być równym drugiemu.

Trzeba tu iednak oſtrzedz zaraz uczniów, iż tym ſpoſobem, ſłabo ſię w rzeczy ſamey dowodzi równość dwóch Równoległościanow. Bo chociażby iak naywięcey było tych przecięć równoodległych od podſtaw Rownoległościanow, to ieſt: chociażby iak naymnieyſza była odległość każdego z tych przecięcia, od drugiego naybliżſzego, wſzelako części Równoległościanów zawarte między takiemi dwoma przecięciami, ſą ieſzcze Równoległościanami, które tak ſię względem ſiebie maią, iak ſię maią całe Równoległościany, których tamte ſą częsciami. Aby więc wnieść można równość Równoległościanow, z równości ich części, trzebaby pierwey dowieśc równości tych części.

Może ſię imaginacya naſza tak daleko zapuścić, że przez nię wyſtawiemy ſobie dwoch Równoległościanów przecięcia tak bliſkie iedne od drugich, iż części między niemi zawarte będą ſię zda-

wać

wać nie różnić od podstaw tychże Równoległościanów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem że małość lub wielkość iakiey rzeczy, nie ieſt w ſobie małością lub wielkością ale ſię albo za małość bierze względem inney rzeczy większey, albo za wielkość, względem inney mnieyſzey; i nie można nigdy Bryły choć by też naycieńſzey za iedno brać z powierzchniami, które ią kończą. Prawda to ieſt, że im większa będzie liczba przecięciów, dwóch Równoległościanów przez płaſzczyzny równoodległe od ich podſtaw, tym mnieyſza będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiema naybliżſzemi płaſzczyznami, czyli przecięciami; ale znowu, ieżeli iakakolwiek ieſt choćby też naymnieyſza, ta różnica, tedy wielokroć powtórżona może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległościanach, których równości chcemy dowodzić, z równości z ich cząłek, czyli z małych Równoległościanów, z których ſię ſkładaią.

Ta ſama trudność do rozwiązania zoſtaie, gdyby kto równości dwóch Równoległościanów maiących iednaką podſtawę

ſtawę i wyſokość, a z których ieden byłby naprzykład proſty, a drugi nie, chciał dowodzić z podnoſzenia ſię w górę ich podſtaw w równey zawſze od pierwſzego położenia odległości; ponieważ pierwey dowieść trzebaby, że mieyſca od podſtaw przebyte, nie podług tey drogi brane być powinny, którą w ſamey rzeczy punkt każdy tych podſtaw przebył; (bo do iednakiey wyſokości postępuiąc, więcey mieyſca przeydzie punkt nap: ſkrayny Równoległościanu ukośnego, niż tego, który ieſt proſty) ale to mieyſce od podſtaw Równoległościanów przebyte, powinno ſię wymierzać wzdłuż linii proſtopadłey do teyże podſtawy, ponieważ ta tylko liniia mierzy odległość, w którey podſtawa podnoſzeniem ſię ſwoim oddaliła ſię od pierwſzego ſwego położenia.

Naſtępuiące porównywanie może iakożkolwiek ſłużyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znoſi cale.

Gdy dwa Równoległoboki zrobione na teyże ſamey podſtawie, i z równą wyſokością, przetniemy liniią równoodległą od podſtawy, obadwa przecięcia równe będą podſtawie. Wſzyſtkie też inne

ne takowe przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równe, i tyleby ich było w iednym, co i w drugim Równoległoboku. Toż mówić i odwoch Tróykątach, których przecięcia równoodległe od podstawy spolney, byłyby także równe. Dla czegoż więc te dwa całe Równoległoboki, lub Tróykąty niemiałyby sobie być równe? Ponieważ tedy tym sposobem dochodziemy względem powierzchni płaskich, tey samey prawdy, którey doszliśmy ścisłym pierwey dowodzeniem; iuż ten sam skutek, powinien nas wątpliwości pozbawić, którąbyśmy mieć mogli w używaniu tego sposobu. Można zatym przystosować go i do Brył dla teyże przyczyny.

Obiaśni się to iaśnie i potym, gdy mówić będziemy o sposobie *wyczerpania* (de methodo exhaustionis.)

81. *Twierdzenie 7.* W iakimkolwiek Równoległościanie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iedney z ścian iego przeciągnąwszy płaszczyznę; przecięcie Równoległościanu przez tę płaszczyznę, będzie Równoległobokiem, i podzieli Równoległościan na dwie części, które przystać do siebie mogą.

Niech

Niech będzie Równoległościan: ACGE; *Tab: III*
przez krawędź AH, i przez przekątną *Fig.* I.
HF niech przechodzi płaszczyzna; linie
AH, CF są równoodległe, a płaszczyzna,
która przechodzi przez AH, HF, przechodzi
też i przez CF. Że zaś linie: AH,
CF są równe, i równoodległe, więc Czworokąt
ACFH, iest oraz i Równoległobokiem.

Dwie Bryły: ABCFGH, FEHACD, mogą przystać do siebie.

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *Rownoległoboczne* (Parallelogrammicæ) są ścianami przeciwnemi w Równoległościanie; ściany zaś ich Tróykątne iak nap: ADC, HEF, maią równe boki iedne względem drugich.

2: Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przystać iedne do drugich; nap: kąt bryłowy w A iedney Bryły, robi się z trzech kątów płaskich: CAB, BAH, HAC, które równe są względem kątów EFH, EFC, HFC, z których się robi kąt bryłowy w F, drugiey Bryły.

Więc te dwie Bryły mogą przystać do siebie, a wszczegulności są sobie równe.

ROZD:

ROZDZIAŁ V.

O Graniastosłupach.

82. T*Wierdz: przybrane.* Niech będą dwie prostokreślne Figury rowne i podobne, wykreślone na dwóch rownoodległych płaszczyznach; niech ieszcze i boki ich rowne, będą rownoodległe iedne względem drugich; Czworokąty, których bokami przeciwnemi, będą boki rowne tych Figur, są Rownoległobokami.

Dowodz: We wszystkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwne są rowne, i rownoodległe; a zatym i inne boki są też rowne i rownoodległe.

83. *Defin:* Niech będzie Bryła iaka zakończona dwiema Figurami prostokreślnemi, rownemi, podobnemi i rownoodległemi a maiącemi wszystkie boki, iedne względem drugich rownoodległe, i tylą Rownoległobokami maiącemi za boki, boki przeciwne tamtych dwóch Figur, ile każda z tych Figur ma boków, ta Bryła nazywa się *Graniastosłupem* (Prisma). I tak Rownoległościany, o których w poprzedzaiących Rozdziałach mówi-

mówiliśmy, ſą pewnemi Graniaſtoſłupów gatunkami. Jedna z tych Figur równych i równoodległych, na którey wyſtawiamy ſobie, iakoby zbudowany Graniaſtoſłup nazywa ſię iego *podſtawą*, a proſtopadła ſpuſzczona na tę podſtawę, z punktu iakiegokolwiek ściany przeciwney nazywa ſię *wyſokością* tego Graniaſtoſłupa. Graniaſtoſłup albo ieſt *proſty*, albo *ukośny*; *proſty*, gdy ściany iego ſtoią do pionu względem podſtawy; *ukośny*, gdy też ściany ſą do podſtawy nachylone.

Różne także nazwiſka przybiera Graniaſtoſłup, podług rozmaitey liczby boków podſtawy ſwoiey, albo podług wielości ścian pobocznych. Nazywa ſię *tróykątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *ſześciokątnym*, gdy podſtawa iego ieſt Tróykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

84. *Twierdz:* I. Przeciąwſzy gdziekolwiek Graniaſtoſłup płaſzczyzną równoodległą od iego Podſtawy, przecięcie to będzie Figurą równą i podobną podſtawie.

Dowodz: Przecięcie iedney któreykolwiek ściany poboczney, przez tę płaſzczy-

ſzczyznę, równoodległym będzie od tego boku podſtawy, na którym ta ściana ſtoi; i tedwie liniie będą bokami przeciwnemi Równoległoboku, który za dwa inne boki, ma części dwóch innych boków teyże ściany, zawarte między podſtawą i płaſzczyzną przecinaiącą; więc te dwie liniie będą równe.

Przecięcia więc przez tę płaſzczyznę dwóch ścian przyległych, będą równoodległe względem boków ſobie przeciwnych, należących do podſtawy, a zatym kąt, który te ſpolne przecięcia zrobią, równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podſtawy.

Będzie tedy mieć przecięcie Graniaſtoſłupa przez tę płaſzczyznę, wſzyſtkie ſwoie boki i wſzyſtkie kąty równe względem boków i kątów podſtawy Graniaſtoſłupa, i dla tego przecięcie to przyſtać może do podſtawy.

85. Można ſobie wyſtawić Graniaſtoſłup, iakoby zrobiony przez poſuwanie ſię w gorę iego podſtawy, w ſpoſob naſtępuiący:

Niech będzie Figura iaka proſtokreślna, odryſowana na płaſzczyznie. Od wierz-

wierzchołku kąta któregokolwiek tey Figury, wyciągniymy liniią proftą czyniącą iakikolwiek kąt z tą płafzczyzną. Niech fię potym wznofi do gory ta Figura, w równey zawfze od fiebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy niefchodzi z linii od niego wyprowadzoney; Bryła która fię takim ruchem utworzy, będzie Graniaftoftupem.

86. *Twierdz.* 2. Graniaftoftup tróykątny, ieft połową Równoległościanu takiego, któryby za podftawę miał Równoległobok dwa razy większy od podftawy tego Graniaftoftupa. zdwoma bokami rownaiącemi fię bokom podftawy tegoż Graniaftosłupa tróykątnego.

Niech będzie Graniaftosłup tróykątny ABCDEF, którego podftawą ieft Troykąt ABC. Dokończmy Równoległoboku ABCG, którego dwoma bokami fą AB, BC; na tym Równoległoboku dokończmy Równoległościanu ACEH, któryby miał fpolne dwie ściany AE, i BD z Graniaftosłupem tróykątnym. Tab. IV. Fig. 1.

Dwa Graniaftosłupy Tróykątne: ABCDFF, DHFAGC, mogą do fiebie przy ftać, bo fą dwiema częściami oddzielonemi

mi przez płaszczyznę przekątną ACDF; a zatym ieden z nich, nap: Graniastosłup ABCDEF, iest połową Równoległościanu ACEH,

87 *Wniosek*. Cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach względem ich wielkości, wszystko to przystosować można do Graniastosłupów troykątnych, które tych Rownoległościanow są połowami.

1. Dwa Graniastosłupy troykątne, rowney wysokości i podstawy, równaią się i w bryłowatości.

2. Dwa Graniastosłupy troykątne, których podstawy są rowne, maią się do siebie, iak ich wysokości.

3. Dwa Graniastosłupy troykątne iednakiey wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.

4. Dwa Graniastosłupy troykątne, których podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości, równaią się sobie w bryłowatości.

5. Dwa Graniastosłupy troykątne, równe w bryłowatości, maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości.

6. Co

6. Co się powiedziało o porownywaniu liczebnym dwòch Ròwnoległościanòw, to twierdzić można i o porownywaniu dwòch Graniastosłupòw tròykątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowatości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podstawy Graniastosłupa tròykątnego, przez liczbę znaczącą wielkość iego wysokości.

7. Maiąc wiadomą podstawę Graniastosłupa tróykątnego, i kąty dwòch ścian iego, ktòre z kątem podstawy czynią ieden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniastosłup tròykątny, i iego wysokość, a zatym i bryłowatość tymże samym sposobem, iak się czyniło względem Ròwnoległościanòw.

8. Graniastosłupy tròykątne, maiące spòlny kąt ieden bryłowy, są do siebie iak Ròwnoległościany prostokątne, maiące te same trzy krawędzie; w rachunku zaś tak są do siebie, iak liczby trzy ciągło iedna przez drugą rozmnożone, wyrażaiące wielkość tych trzech krawędzi.

88. *Twierdz:* 3. Graniastosłup nie tròykątny może być rozłożony na Gra-

niaſtosłupy tròykątne teyże co on wyſokości; za podſtawy zaś maiące Tròykąty, na ktòre rozdzielona ieſt iego podſtawa przez tyle przekątnych ciągnionych od iednego tey podſtawy wierzchołka do innych, ile ich poprowadzić można.

Tab. IV. Fig. 2. Niech będzie ABCDE, podſtawa nap: pięciokątna Graniaſtosłupa ABCDE edcba. Od iey wierzchołka nap: A poprowadźmy przekątne: AD, AC, te rozdzielą Podſtawę na trzy Tròykąty: AED, ADC, ACB. Na ścianie przeciwney podſtawie, od punktu *a*, odpowiadaiącego punktowi A, poprowadźmy przekątne: ad, ac.

Liniie Aa, Dd, ſą obiedwie ròwnoodległe od linii Ee, i oney ròwne; więc i względem ſiebie będą ròwnoodległemi i ròwnemi; a przeto Czworokąt ADda, ieſt Ròwnoległobokiem, a zatym Bryła ADE eda, ieſt Graniaſtosłupem tròykątnym. Tymże ſpoſobem okazuie ſię, że i Bryły: ACDdca, ACBbca, ſą Graniaſtosłupami tròykątnemi.

89. *Twierdz:* 4. Dwa iakiekolwiek Graniaſtosłupy maiące ròwną wyſokość, tak ſię do ſiebie maią, iak ich podſtawy. Jakoż

Jakoż Graniaſtosłupy ADE eda, ADC cda, ACB bca, i t. d. maią ſię do ſiebie iak ich podſtawy; ADE, ACD, ABC; więc ieden z nich, nap: Graniaſtosłup: ADE eda, tak ſię ma do ſummy wſzyſtkich, to ieſt, do Graniaſtosłupa pięciokątnego, iak podſtawa tròykątna pierwſzego, do ſummy podſtaw wſzyſtkich, to ieſt, do podſtawy Graniaſtosłupa pięciokątnego. Podobnie też i każdy inny Graniaſtoſłup iednakiey wyſokości, takby ſię miał do Graniaſtoſłupa tròykątnego: ADEeda, iak podſtawa iego do podſtawy tròykątney ADE.

Więc (złożywſzy ſtoſunki) będzie ſtoſunek iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa do Graniaſtoſłupa ABCDE edcba, ròwny ſtoſunkowi podſtawy pierwſzego Graniaſtoſłupa, do podſtawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wyſokości tych dwòch Graniaſtoſłupòw ſą ròwne.)

Wſzczegulności zaś, gdy Ròwnoległościan i Graniaſtosłup iakikolwiek ròwne mieć będą podſtawy i wyſokości; bryłowatość iednego, ròwna będzie bryłowatości drugiego.

A zatym cokolwiek ſię o Ròwnoległościanach powiedziało, można to i do

Graniastosłupów iakichkolwiek przystosować, co do wielkości ich, ile te zawisły od ich podstaw i wysokości. Można przeto do iakichkolwiek Graniastosłupów przystosować wniosłki, co do Graniastosłupów tròykątnych wszczegulności, które po Twierdzeniu 2gim tego Rozdziału następuią.

ROZDZIAŁ VI.

O Piramidach albo Ostrosłupach.

90. DEfin: Niech punkt iaki znayduie się nad płaszczyzną Figury iakieykolwiek prostokreślney; przez ten punkt i przez wszystkie boki Figury, niechay przechodzą płaszczyzny; zrobi się ztąd Bryła kończąca się z iedney strony na tey Figurze, a z innych stron, na tylu Tròykątach maiących spolny wierzchołek w owym punkcie, ile ta Figura ma boków. Bryła ta nazywa się *Ostrosłupem* (Pyramis.) Powierzchnią Ostrosłupa można sobie wystawić iakoby zrobioną ruchem nici przywiązaney iednym końcem do punktu znayduiącego się nadpłaszczyzną Figury, a drugim końcem wyciągnionym obracaiącey się około obwodu teyże Figury. Figura prostokreślna,

ślna, ktòrey boki służą za podstawy Tròy kątòw kończących Ostrosłup, nazywa się *podstawą* ostrosłupa, te Tròykąty nazywaią się iego *ścianami*; punkt ktòry iest wierzchołkiem spolnym wszystkich ścian Ostrosłupa, nazywa się *wierzchołkiem* iego. Prostopadła spuszczona od tego wierzchołka, na płaszczyzrę podstawy, zowie się *wysokością* Ostrosłupa.

Ostrosłup ròżne przybiera nazwiska, podług wielkości bokòw podstawy swoiey. Nazywa się tròykątnym, czworokątnym, pięciąkątnym, sześciokątnym i t. d. gdy podstawa iego iest Tròykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

Ten Ostrosłup nazywać będziemy *prostym*, ktòrego podstawą iest Figura prostokreślna mogąca się na kole opisać; i gdy prostopadłey spuszczoney od wierzchołka tego Ostrosłupa, drugi koniec przypada na środek tego koła.

W takim Ostrosłupie wysokość wszystkich ścian iest iednakowa, i tych ścian płaszczyzny rowńie są nachylone do płaszczyzny podstawy.

W Ostrosłupie, ktòrego podstawą iest Figura prostokreślna mogąca się wpisać

w kolo

w koło, a którego wysokość wychodzi od środka, tego koła, wszystkie krawędzie ścian są równe, a zatym wszystkie te ściany są Tròykątami równoramiennemi. Ale że środek koła opisanego na podstawie, może czasem za tę podstawę wychodzić, dla tego, takowego Ostrosłupa nie można nazywać prostym.

Zeby iednak nazwisko to Ostrosłupa prostego (zle do tych czas zwyczaynie określone) ogulnieyszym uczynić, przydamy następucący warunek.

Gdy w Figurze prostokreślney, znayduie się taki punkt, przez który ciągnione liniie a po obydwòch stronach na obwodzie Figury zakończone, dzielą się w tym punkcie na dwie równe części, ten punkt nazywa się środkiem Figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w Równoległoboku, iest tego Ròwnoległoboku środkiem. Jeżeli tedy Figura prostokreślna maiąca taki środek, służy za podstawę Ostrosłupowi, i ieżeli prostopadła od wierzchołku iego spuszczona przypada na ten środek Figury, taki Ostrosłup nazwiemy prostym.

Ostro-

Otrosłup nazywaſię *foremnym*, gdy za podſtawę ma Figurę proſtokreślną foremną.

91. *Twierdz:* 1. Przeciąwſzy Oſtrosłup płaſzczyzną rownoodległą od podſtawy. iego, przecięcie to będzie Figurą podobną do podſtawy.

Niech będzie Oſtroſłup SABCDE, maiący wierzchołek w punkcie S, a którego podſtawą ieſt Figura proſtoſkreślna ABCDE. Niech ten Oſtrosłup przecina płaſzczyzna rownoodległa od podſtawy, przecięcie to abcde będzie podobne do podſtawy. *Tab: IV Fig: 3*

Ponieważ płaſzczyzna podſtawy ròwnoodległa ieſt od płaſzczyzny przecinaiącey; będą też i przecięcia ścian, ſpòlne z temi płaſzczyznami, ròwnoodległe iedne względem drugich; więc wſzyſtkie boki przecięcia nap. ab, bc ròwnoodległe będą względem bokòw AB, BC podſtawy; a zatym i wſzyſtkie kąty przecięcia, ròwne będą względem kątów podſtawy, nap: kąt abc, ròwny będzie kątowi ABC. Ieſt tedy przecięcie ròwnokątne z podſtawą.

Tròykąty SAB, sab ſą podobne, więc Sb: SB = ab : AB.

Tròy-

Tròykąty też, Sbc. SBC podobne; więc: Sb: SB=bc: BC; a zatym ab: AB =bc: BC.

Więc przecięcie, i podſtawa, maią około kątòw względem ſiebie ròwnych, boki proporcyonalne, a zatym przecięcie podobne ieſt do podſtawy.

W ſzczegulności zaś, przecięcie takie, i podſtawa, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym bokòw ich, odpowiadaiących ſobie; albo ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym liniy nap: Sb, SB; albo nakoniec w ſtoſunku dwumnożnym ich odległości od wierzchołka S, Oſtroſłupa, maiącey ſię wymierzać przez proſtopadłą ſpuſzczoną od tego wierzchołka, do ich płaſzczyzn; tak dalece, że przeciąwſzy Oſtroſłup płaſzczyznami ròwnoodległemi od podſtawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby te miały ſię do ſiebie, iak liczby 1,2,3,4.5, i t. d: powierzchnie tych przecięciòw będą do ſiebie iak liczby 1,4,9,16,25, i t. d. (Obacz Geometryi Części I. Rozdz. IX.)

Uwaga. Tego Podania częſte ieſt w Fizyce używanie; i dla tego trzeba ie iak nayiaśniey uczniom wyłożyć, i o gruntownym iego zrozumieniu od nich być przeświadczonym.

92. *Wnio-*

92. *Wniosek* 1. Niech będą dwa Ostrosłupy ziednakową wysokością, i zrównemi podstawami znayduiącemi się na teyże samey płaszczyznie, i poiedney stronie tey płaszczyzny. Gdy te Ostrosłupy przetniemy płaszczyznami równoodległemi od ich podstaw, przecięcia odpowiadaiące sobie, tak się mieć do siebie będą, iak podstawy tych Ostrosłupów; a wszczególności, gdy te podstawy równe będą, wszystkie też przecięcia iednego Ostrosłupa będą równe przecięciom odpowiadaiącym drugiego.

93. *Wniosek* 2. Z tego co się powiedziało o równości Graniastosłupów maiących iednaką wysokość i równe podstawy, a stoiących na teyże samey płaszczyznie, iako też i o proporcyonalności tych Graniastosłupów z ich podstawami, gdy te przy równych wysokościach, są nierówne; możnaby mniemać, że też i Ostrosłupy maiące równe wysokości, i podstawy, są równe, i że gdy równe maią wysokości, będą do siebie iak ich podstawy.

Następuiące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczemy.

94. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Ostrostup Tròykątny przecięty płaszczyznami rôwnoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Na podstawie, i na każdym przecięciu wystawmy ku wierzchołkowi Ostrostupa, Graniastostupy z których każdy miałby wysokość ròwną odległości dwòch płaszczyn naybliższych. Na tychże przecięciach, wystawmy znowu inne Graniastostupy ku podstawie, z tą samą, co pierwsze, wysokością. Niech każdy z tych Graniastostupòw ma iednę krawędź spolną z Ostrostupem, i dwie ściany na tychże płaszczyznach co i dwie krawędzie Ostrostupa. Różnica summy wszystkich pierwszych Graniostostupòw (ktòre nazwę opisanemi) od summy drugich (ktòre nazwę wpisanemi) rôwna będzie pierwszemu Graniastostupowi, ktòry iest wystawiony na podstawie Ostrostupa.

Tab. I. V. Fig: 4. Nich będzie Ostrostup tròykątny SABC, ktòrego wiezchołek S, a podstawa ABC.

Podzielmy ten Ostrostup na części nap: 5, płaszczyznami rôwnoodległemi od podstawy, i w iednakowey od siebie odległości zostaiącemi. Niech będą: $A^1B^1C^1$ $A^2B^2C^2$ $A^3B^3C^3$ $A^4B^4C^4$ przecięcia Ostrostupa,

przez

przez te płaszczyny. Na podstawie i na wszystkich przecięciach Ostrosłupa wystawmy ku iego wierzchołkowi Graniastosłupy, kończące się na przecięciu nayblizszym; te będą opisanemi na Ostrosłupie, bo ich ściany występować będą za ściany Ostrosłupa. Wystawmy znowu na tychże przecięciach ku podstawie, inne Graniastosłupy teyże samey co pierwsze wysokości; te będą wpisanemi w Ostrosłup, bo za ściany ich, będą wychodzić ściany Ostrosłupa. Rożnica między summą pierwszych i drugich Graniastosłupòw, ròwnać się będzie Graniastosłupowi opisanemu, wystawionemu na podstawie Ostrosłupa.

Wykreśl: Podzielmy liniie AB, AC, na 5 ròwnych części. w punkach: b^1, b^2, b^3, b^4, c^1, c^2, c^3, c^4. i pociągniymy liniie; b^1c^1, b^2c^2, b^3c^3, b^4c^4.

Tròykąty: Ab^1c^1, Ab^2c^2, Ab^3c^3, Ab^4c^4, będą ròwne względem Ostrosłupa przecięciów: $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, $A^4B^4C^4$.

Rożnica między Graniastosłupem opisanym a stoiącym na podstawie ABC, i między Graniastosłupem wpisanym a stoiącym

iącym na podſtawie $A^1B^1C^1$ równa ſię Graniaſtoſłupowi teyże ſamey co tamte wyſokości, maiącemu za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt BCc^1b^1.

Podobnie i różnica między Graniaſtoſłupem opiſanym, a ſtoiącym na przecięciu $A^1B^1C^1$, i między Graniaſtoſłupem wpiſanym a ſtoiącym na przecięciu $A^2B^2C^2$ równa ſię Graniaſtoſłupowi, teyże ſamey co one wyſokości, maiącemu za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt $b^1c^1b^2c^2$.

Także różnice dwóch par Graniaſtoſłupów naſtępuiących, równe ſą Graniaſtoſłupom, teyże co one wyſokości maiącym za podſtawy Cworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3\ b^4c^4$.

Oſtatni zaś Graniaſtoſłup opiſany, rowna ſię Graniaſtoſłupowi, teyże co on wyſokości, maiącemu za podſtawę Tróykąt Ab^4c^4.

Różnica tedy między ſummą wſzyſtkich Graniaſtoſłupów opiſanych, a ſummą wſzyſtkich Graniaſtoſłupów wpiſanych, równa będzie ſummie wſyſtkich Graniaſtoſłupów teyże co one wyſokości, któreby

ſtały

ſta'y na Czworokątach BCc¹b¹, b¹c¹c²b², b²c²c³b³, b³c³c⁴b⁴, i na Tròykącie Ab⁴c⁴, to ieſt: ròwna będzie Graniaſtoſłupowi tròykątnemu teyże co one wyſokości, a maiącemu za podſtawę Tròykąt ABC. Ta więc rożnica ròwna ſię w ſamey rzeczy pierwſzemu Graniaſtoſłupowi opiſanemu.

95. *Wnioſek.* Pierwſzy ten Graniaſtoſłup opiſany na Oſtroſłupie SABC, ktòrego podſtawa ABC nie odmienia ſię, będzie tym mnieyſzy, im mnieyſzą damy mu wyſokość, to ieſt, im liczba przecięć Oſtroſłupa będzie więkſza. Można zaś uczynić ten Graniaſtoſłup mnieyſzym od iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa naznaczonego, zamieniaiąc ten oſtatni Graniaſtoſłup na inny, ktòryby miał za podſtawę Tròykąt ABC, i dziełąc wyſokość iednoſtayną Oſtroſłupa, na tyle części, aby każda z nich była mnieyſza od wyſokości tego Graniaſtoſłupa tak przerobionego.

Maiąc więc dany Oſtroſłup, można weń wpiſać, i opiſać na nim ſpoſobem wyżey wyrażonym, tyle Graniaſtoſłupòw, aby ròżnica dwòch ſumm, mnieyſza była od iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa na

znaczo-

znaczonego, a tym bardziey, aby rożnica Ostrosłupa od iedney z tych summ mnieysza była od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego.

96. *Twierdz.* 2. Dwa Ostrosłupy maiące rowne wysokości i podstawy, są rowne.

Gdyby te dwa Ostrosłupy nie były rowne, tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniemana ich rożnica zamieniona była na Graniastosłup maiący rowną z temi Ostrosłupami podstawę. Podzielmy wysokość iednego z tych Ostrosłupa na tyle części rownych, aby każda z nich mnieysza była od wysokości tego Graniastosłupa. Wpiszmy w ten Ostrosłup i opiszmy na nim Graniastosłupy sposobem wyrażonym w poprzedzaiącym Twierdzeniu przybranym. Toż uczyńmy i na drugim Ostrosłupie; wszystkie Graniastosłupy wpisane, i opisane, na tych dwoch Ostrosłupach, bedą rowne iedne względem drugich (87, 88) a zatym summa Graniastosłupow wpisanych nap: w ieden Ostrosłup będzie rowna summie Graniastosłupow wpisanych w drugi Ostrosłup. Że zaś zrobiliśmy rożnicę dwoch summ

Gra-

Graniastosłupów wpisanych i opisanych na pierwszym Ostrosłupie, mnieysza od różnicy mniemaney dwóch Ostrosłupów, więc tym bardziey różnica tego Ostrosłupa od summy wszystkich Graniastosłupów weń wpisanych, mnieysza będzie, od rożnicy mniemaney tych dwóch Ostrosłupów; a zatym i różnica pierwszego Ostrosłupa, od summy Graniastosłupów wpisanych w drugi Ostrosłup, mnieysza będzie, niż różnica pierwszego Ostrosłupa od drugiego. Summa tedy Graniastosłupów wpisanych w ten drugi Ostrosłup, byłaby większa od tego drugiego Ostrosłupa, co być nie może; a przeto te dwa Ostrosłupy nie mogą sobie być nierówne.

97. *Twierdz:* 3. Graniastosłup tróykątny, może zawsze być rozłożony na trzy Ostrosłupy tróykątne równe, z których dwa mieć będą tę samę podstawę i wysokość, co i Graniastosłup.

Niech będzie Graniastosłup tróykątny ABCEF, można go rozłożyć na trzy Ostrosłupy tróykątne równe, z których dwa, tę samę, co on mieć będą podstawę i wysokość. *Tab. IV Fig.* 5

Przez bok AC, podstawy ABC, Graniastosłupa, i przez koniec F, krawędzi

jego

tego Graniaſtoſłupa nie przechodzącey przez punkta: A i C, przeciągniymy płaſzczyznę ACF; odetnie ona od Graniaſtoſłupa, Oſtroſłup tròykątny FABC. maiący za wierzchołek, punkt F, a za podſtawę, Tròykąt: ABC; a zatym ten Oſtroſłup, tę ſamę co i Graniaſtoſłup mieć będzie podſtawę i wyſokość.

Podobnie i przez bok EF, ściany przeciwney podſtawie, i przez punkt C przeciągniymy płaſzczyznę ECF; odetnie ona od Graniaſtoſłupa, Oſtroſłup tròykątny: CEDF, maiący za wierzchołek, punkt C, a za podſtawę Tròykąt DEF, ròwny Tròykątowi: ABC, a zatym i ten drugi Oſtroſłup ma tę ſamę także co i Graniaſtoſłup, podſtawę i wyſokość.

Więc dwa Oſtroſłupy: FABC, CDEF ròwne maią wyſokości, i podſtawy, a zatym ſą ròwne (96). Zoſtanie ieſzcze po tych dwòch przecięciach, Oſtroſłup CFEA, zakończony czterema Tròykątami: ACF, ACE, AEF, ECF.

Wyſtawmy ſobie, ten oſtatni Oſtroſłup iako maiący za podſtawę, Tròykąt: nap: ACE, a za wierzchołek, punkt F, Oſtroſłup zaś CEDF, iakoby miał za podſtawę,

Tròy-

Tròykąt: CDE, a za wierzchołek tenże punkt F. Przekątna CE, Równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa Tróykąty, które przyſtać do ſiebie mogą; więc te dwa Oſtroſłupy maią podſtawy równe, ACE, DEC i na iedney płaſzczyznie znayduiące ſię; a oprocz tego maią ſpólny wierzchołek w punkcie F, a zatym i wyſokość równą; więc ſą równe; wſzyſtkie tedy trzy Oſtroſłupy, na które Graniaſtoſłup był podzielony, ſą równe.

Wzaiemnie Oſtroſłup tóykątny, można zawſze ſobie wyſtawić, iako trzecią część Graniaſtoſłupa maiącego tę ſamę co i Oſtroſłup podſtawę, i wyſokość.

Niech będzie Oſtroſłup tróykątny: ABCF, którego podſtawa ABC, a wierzchołek F.

Na teyże podſtawie ABC, wyſtawmy ſobie iakoby zbudowany Graniaſtoſłup, ABCDEF, którego dwie ściany ABFE, BCDF znaydowałyby ſię na tych ſamych płaſzczyznach, na których znayduią ſię dwie ściany Oſtroſłupa, i krawędź im ſpolna BF. Podług Twierdzenia poprzedzaiącego, ten Graniaſtoſłup ieſt trzy razy tak wielki, iak Oſtroſłup; więc też i ten Oſtroſłup ieſt trzecią częścią tego Graniaſto-

ſłupa. A że wſzyſtkie Graniaſtoſłupy maiące równe podſtawy i wyſokości, ſą równe; więc Oſtroſłup tróykątny ieſt trzecią częścią Graniaſtoſłupa iakiegokolwiek, maiącego taką ſamę iak on podſtawę i wyſokość.

98. *Twierdz*: 4. Oſtrosłup iakikolwiek ieſt trzecią częścią Graniaſtoſłupa maiącego tę ſamę co on podſtawę, i wyſokość.

Dowodz. Jakażkolwiek będzie podſtawa Oſtrosłupa, poprowadźmy na niey przekątnych tyle do wſzyſtkich kątów, ile można. Przez te wſzyſtkie przekątne, i przez wierzchołek Oſtrosłupa niech przechodzą płaſzczyzny; Oſtroſłup będzie przez te płaſzczyzny podzielony na tyle Oſtroſłupów tróykątnych, na ile Tróykątów podſtawa była podzielona przez przekątne; każdy z tych Oſtrosłupów tróykątnych, będzie trzecią częścią Graniaſtosłupa maiącego taką ſamę iak on podſtawę, i wyſokość; a zatym ſumma wſzyſtkich tych Oſtrosłupów tróykątnych, to ieſt cały iakikolwiek Oſtrosłup znich ſię ſkładaiący, równać ſię będzie trzeciey części, ſummy wſzyſtkich tych Graniaſtosłupów, alboco na iedno wychodzi, równać ſię będzie

dzie trzeciey części Graniaſtosłupa maiącego tę ſamę podſtawę i wyſokość, co i Oſtrosłup.

99. *Wnioſki.* Cokolwiek ſię o ſtoſunku Graniaſtosłupów powiedziało, toż mówić można i o ſtoſunku Oſtrosłupów, które, maiąc takie ſame iak i te Graniaſtosłupy, podſtawy, i wyſokości, ſą trzeciemi względem nich częściami.

1. Dwa Oſtrosłupy iakiekolwiek (proſte, lub ukośne foremne, lub nie foremne) z równemi wyſokościami, tak ſię do ſiebie maią, iak ich podſtawy.

2. Dwa Oſtrosłupy z równemi podſtawami, tak ſię do ſiebie maią, iak ich wyſokości,

3. Dwa Oſtrosłupy ſą równe, gdy ich podſtawy ſą w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości.

4. Dwa Oſtrosłupy równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości, i wyraz liczebny bryłowatości Oſtrosłupa będzie znaleziony, gdy ſię weźmie trzecia część dwóch liczb rozmożonych, z których iedna znaczyłaby

wielkość powierzchni podſtawy tego Oſtrosłupa, a druga, wielkość iego wyſokości.

100. *Uwaga.* Maiąc dane wliczbach, ſześć krawędzi iakiego Oſtrosłupa trôykątnego, można wyznaczyć bryłowatość tego Oſtrosłupa.

Jakoż złożywſzy Trôykąt z trzech takowych krawędzi, i uważaiąc go iak podſtawę Oſtrosłupa; a na trzech bokach tey podſtawy, zrobiwſzy trzy Trôykąty, na teyże ſamey, co i podſtawa płaſzczyznie, dawſzy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozoſtałych; te Trôykąty będą ścianami Oſtrosłupa. Kąt każdy bryłowy przy podſtawie, ſkładać ſię będzie, z kąta Trôykąta wziętego za podſtawę, i z dwôch kątôw ścian dwôch przy podſtawie. Ponieważ zaś te kąty ſą wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podſtawy, a wſzczegulności będzie można wyrachować ſtoſunek wyſokości Oſtrosłupa, do ſpólnego przecięcia tych dwôch ścian. Aże to ſpólne przecięcie ieſt dane co do wielkości, więc doydziemy i wyſokości Oſtrosłupa, a zatym i iego bryłowatości,

ktora

która zawisła od wyſokości Oſtrosłupa, i powierzchni iego podſtawy.

101. *Uwaga* 2. Można tę bryłowatość wyznaczyć i bez Trygonometryi, iako ſię to pokaże w Algebrze.

102. *Uwaga* 3. Gdy Oſtrosłup ieſt foremny, a zatym trzy ścian iego krawędzie ſą równe; Kwadrat wyſokości Oſtrosłupa, równa ſię rożnicy kwadratu iedney krawędzi, od kwadratu promienia koła na podſtawie opiſanego. A przeto ta wyſokość może być bardzo łatwo w liczbach wyznaczona, bez pomocy Trygonometryi. Ten zaś ſpoſob poſtępowania przyſtoſować można do wſzyſtkich Oſtrosłupów foremnych, iakkolwiek byłaby liczba ich boków w podſtawie.

Przykł: 1. Wyznaczyć bryłowatość Bryły nazwaney *Czworościanem* (Tetraedrum.)

Bok ieden Troykąta rownobocznego wyznaczywſzy przez liczbę 2, kwadrat wyſokości tego Tróykąta wyrazi ſię przez liczbę 3. Promień koła opiſanego ieſt $\frac{2}{3}$ tey wyſokości, więc kwadrat tego

pro-

promienia, iest $\frac{4}{9}$, kwadratu wysokości Tròykąta, a zatym kwadrat tego promienia iest $\frac{12}{9}$. Ze zaś kwadrat wysokości tego Ostrosłupa iest $4 - \frac{12}{9} = \frac{24}{9} = \frac{4 \times 6}{9}$ więc sama wysokość będzie $= \frac{2V6}{3}$,

Powierzchnia Tròykąta służącego za podstawę wyrazi się przez V3, a zatym bryłowatość Ostrosłupa będzie wyrażona przez $\frac{2V2}{3}$; to iest bryłowatość Ostrosłupa tak się ma do bryłowatości Sześcianu ròwnego co do bokow Ostrosłupowi, iak $\frac{2V2}{3}$ do 8, albo iak V2 do 12; albo iak 2 do 12V2, albo iak 1 do 6V2; albo nakoniec iak 1 do V72; ktòry to stosunek bliski iest stosunku 2 do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało ròżni się od stosunku 68 do 577.

Przykł. 2. Wyznaczyć bryłowatość Ośmiościanu foremnego.

Można sobie Ośmiościan wystawić w myśli, iakoby złożony z dwóch Ostrosłupów prostych kwadratowych, stykaiących się z sobą ròwnemi podstawami.

Wyra-

Wyrziwszy bok ieden Ośmiościanu tego, przez 2, kwadrat promienia koła opisanego na podstawie iednego z tych dwóch Ostrosłupów, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wysokości tego Ostrosłupa wyrazi się przez różnicę między kwadratem z 2, to iest 4, i 2, to iest będzie $=4-2=2$. Wysokość zaś tego Ostrosłupa wyrazi się przez $\sqrt{2}$; więc bryłowatość iednego tego Ostrosłupa będzie oznaczona przez $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, a zatym bryłowatość Ośmiościanu przez $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Jest tedy bryłowatość Ośmiościanu foremnego do bryłowatości Sześcianu równego co do wielkości boków, iak $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2} : 3$, który to stosunek bliski iest stosunkowi 8 do 17, albo 17 do 36, a bardzo mało różni się od stosunku 33 do 70.

103. *Uwaga* 3. Ponieważ ściany Ostrosłupa są powierzchniami płaskiemi i to ieszcze tròykątnemi, wyznaczenie iego powierzchni, żadney nie podlega trudności. Gdy Ostrosłup iest foremny, powierzchnia iego (oprocz podstawy) rów-

wna

wna będzie Tróykątowi, któryby miał za podſtawę, obwod podſtawy Oſtroſłupa; a wyſokość równą wyſokości ściany którey kolwiek (ponieważ wſzyſtkie ſą ròwne.)

Wyboczenie (Digreſſio) *o ſposobie wyczerpania nazwanego po Łacinie* Methodus exhauſtionis; *maiące ſłużyć za wſtęp do Rozdziałów naſtępuiących.*

104. Spoſob, którego ſię użyło dla dowiedzenia równości dwóch Oſtroſłupów, których podſtawy i wyſokości ſą równe, na to wypada, aby okazać, iż każdy z tych Oſtroſłupów zawarty ieſt między dwiema ilościami, których różnica może być mnieyſza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; to ieſt: że każdy Oſtroſłup ieſt zawarty między ſummą Graniaſtoſłupów na nim opiſanych i ſummą Graniaſtoſłupòw weń wpiſanych; i że tych dwòch ſumm ròżnica może być mnieyſza od iakieykolwiek ilości naznaczóney; a tym bardziey każdego z tych Oſtroſłupa różnica, od iedney z tych ſumm, może być mnieyſza, niż iakakolwiek ilość naznaczona. Zkąd można było Oſtroſłupom porownywanym do ſiebie przyſtoſować to wſzyſtko, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku ie-

dney

dney z tych summ, nap: summy Graniastosłupów opisanych na iednym Ostrosłupie, do drugiey z tych summ, to iest do summy Graniastosłupów w iednakiey liczbie, opisanych na drugim Ostrosłupie. Że zaś, gdy Ostrosłupy miały równe podstawy i wysokości, te dwie summy Graniastosłupów były równe; więc też i Ostrosłupy, których różnica od tych dwóch summ może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona, będą równe.

105. Gdyby dwa Ostrosłupy miały tylko wysokości ròwne, a podstawy nieròwne; możnaby tymże samym prawie sposobem okazać, że są do siebie, iak ich podstawy; a to ztądby się wniosło, że wtymże samym stosunku byłyby do siebie summy Graniastosłupòw opisanych na każdym z tych Ostrosłupow; i że każdy z tych Ostrosłupów może się ròżnić od każdey z tych summ, odpowiadaiących sobie, ilością mnieyszą, niżeli iest iakakolwiek ilość naznaczona.

106. Ponieważ ten sposòb wnoszenia stosunku dwòch ilości, ktòre bezśrednie z sobą porównywać iest trudno, będzie bardzo często używany w Rozdziałach nastę-

naſtępuiących, przeto nie zawadzi okazać ieſzcze pewność iego na kilku przykładach, aby iuż potym nie trzeba było za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, ktòry zawſze ieſt iednakowy,

Przykł. 1. Niechby dowiedziono było, że dwa Ròwnoległoboki maiące ròwne wyſokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy. Trzeba ieſzcze dowieść, że i dwa Troykąty, ktòrych ròwne ſą wyſokości, maią ſię do ſiebie iak ich podſtawy. (W tym zaś ſtawiamy ſię mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Tròykąt ieſt połową Ròwnoległoboku, teyże co on podſtawy i wyſokości.)

Niech będą dwa Tróykąty: ABC,abc. *Tab.IV. Fig.* 6. ròwney wyſokości, a z nie ròwnemi podſtawami; trzeba dowieść, że ſię tak maią do ſiebie, iak ich podſtawy; a to ztąd, że i Ròwnołegłoboki iednakiey wyſokości ſą do ſiebie, iak ich podſtawy.

Podzielmy bok ieden nap. AC, napewną liczbę części rownych. Przez wſzyſtkie punkta podziału poprowadźmy ròwnoodległe od podſtawy; a na każdey z tych ròwnoodległych wpiſzmy i opiſzmy Tróy-

Tròykątowi ABC, Rownoległoboki, maiące za ſpolną wyſokość równe oddalenie dwoch naybliżſzych ròwnoodległych.

Ròżnica Równoległoboków opiſanych, od Ròwnoległobokow wpiſanych, ròwnać ſię będzie naywiękſzemu z nich Ròwnoległobokowi. Ta zaś ròżnica może być mnieyſzą zrobiona, niż iakikolwiek Ròwnoległobok naznaczony, odmieniwſzy go na inny Równoległobok, któryby tę ſamę, co i Troykąt miał podſtawę, i kąt z nim przy podſtawie ſpolny, a potym podzieliwſzy drugi bok AC, Tróykąta na tyle części rownych, aby każda z nich mnieyſza była od drugiego boku, Równoległoboku naznaczonego.

Gdyby to być mogło, abc dwa Tróykąty: ABC, abc. nie miały ſię do ſiebie, iak ich podſtawy; tedy ieden z tych Troykątow; nap: ABC, byłby do uczynienia tego ſtoſunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, ieżeli to być może, trzeba powiękſzyć Tròykąt ABC, Równoległobokiem ABFE. aby ſię tak miał do Tròykąta abc, iak AB do ab.

Podziel-

Podzielmy bok AC. na tyle części równych, aby każda z nich mnieyfza była od linii AE; wpifzmy potym i opifzmy Tróykątowi Równoległoboki, w fpofób wyżey wyrażony. Niech będzie naywiękfzy z nich Równoległobok AGHB. Różnica fummy Równoległoboków opifanych od fummy Równoległobokow wpifanych, uczyniona ieft mnieyfzą, niżeli Równoległobok ABFE; tym bardziey zaś Różnica fummy Równoległoboków opifanych, na Tróykącie ABC, od tegoż Tróykąta, ABC, mnieyfza będzie, niżeli Równoległobok ABFE; a zatym fumma wfzyftkich Równoległoboków opifanych, mnieyfza ieft od Równoległoboku ABFE, wraz wziętego z Tróykątem ABC.

Podzielmy i bok ac, Tróykąta abc, na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok AC; opifzmy natym Tróykącie Równoległoboki, tak iak wyżey.

Równoległoboki opifane, na tych dwóch Tróykątach, a odpowiadaiące fobie, tak fię mieć będą do fiebie, iak podftawy AB, ab, tychże Tróykątow; więc też i fumma wfzyftkich Równoległoboków opifanych na Tróykącie ABC, tak fię

mieć

mieć będzie do summy Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, iak podstawa AB, pierwszego Tróykąta, do podstawy ab, drugiego; to iest: przez przypuszczenie, iak summa, z Tróykąta ABC, i z Równoległoboku ABFE, do Tróykąta abc. A że zrobiliśmy pierwszy poprzednik mnieyszym od drugiego, więc też i pierwszy następnik byćby powinien mnieyszy od drugiego; to iest summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, powinnaby być mnieysza od Tróykąta abc, co iednak być nie może; a zatym stosunek podstaw tych dwóch Tróykątów, tenże sam iest, co i samych Tróykątow.

Podobnym sposobem możnaby okazać, że i drugi Tróykąt abc, nie powinien być powiększony, aby miał ten sam do Tróykąta ABC, stosunek, co i ich podstawy.

Przykł: 2. Niech Tróykąty ABC, abc. wystawuią dwóch Ostrosłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki C, c, i przez prostopadłe spuszczone od tych wierzchołków do podstaw Ostrosłupów. Niech te obadwa Ostrosłupy, będą iednakiey wysokości. Trzeba dowieść, że bryłowatości tych Ostrosłupów, tak się mają

ią do siebie, iak ich podstawy, a to z własności Graniastosłupów iednakowey wysokości, które także w takim iak ich podstawy stosunku są do siebie, czego się iuż wyżey dowiodło.

Okaże się, w podobny sposob, że opisawszy i wpisawszy iednemu z tych Ostrosłupowi, Graniastosłupy, równey wszystkie wysokości; różnica wpisanych od opisanych, równać się będzie naywiększemu Graniastosłupowi opisanemu, i że można w to potrafić, aby ta różnica mnieysza była niż iakikolwiek Graniastosłup naznaczony; a tym bardziey różnica Ostrosłupa od każdey z tych summ mnieysza będzie, niżeli ten Graniastosłup.

Wpisawszy i opisawszy drugiemu Ostrosłupowi, tyle co i pierwszemu Graniastosłupów; summa tych wszystkich Graniastosłupów opisanych na pierwszym Ostrosłupie, tak się mieć będzie do summy opisanych na drugim, iak podstawa pierwszego Ostrosłupa, do podstawy drugiego. Także i summy Graniastosłupów wpisanych, w tym samym stosunku będą, co i podstawy dwóch Ostrosłupów.

Gdyby to albowiem być mogło, aby stosunek dwóch tych Ostrosłupow, nierówny

wny był ſtoſunkowi ich podſtaw, tedy ieden z tych Oſtrosłupòw, byłby nap: nadto mały na ten ſtoſunek. Przydaymy mu więc tę ilość, ktorą powiękſzony, zachowa ten ſtoſunek, i zamieńmy też ilość na Graniaſtosłup rówńey z nim podſtawy. Temu Oſtrosłupowi wpiſzmy i opiſzmy Graniaſtosłupy iednakiey wyſokości, tak iednak małey, aby różnica ſumm Graniaſtosłupów wpiſanych od opiſanych, mnieyſza była od różnicy naznaczoney; będzie tym bardziey różnica ſummy Graniaſtosłupów opiſanych na tym Oſtrosłupie, od tegoż Oſtrosłupa mnieyſza, niżeli różnica naznaczona; a zatym ſumma tych Gtaniaſtosłupòw mnieyſza będzie niżeli ſumma z Oſtrosłupa i z różnicy naznaczoney.

Na drugim Oſtrosłupie opiſzmy tyleż co i na pierwſzym Graniaſtosłupòw.

Summa wſzyſtkich Graniaſtosłupòw opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, tak ſię mieć będzie do ſummy Graniaſtosłupòw opiſanych na drugim Oſtrosłupie, iak podſtawa pierwſzego Oſtrosłupa, do podſtawy drugiego; to ieſt: iak ſumma z pierwſzego Oſtrosłupa, i z różnicy iego mniemaney, do drugiego Oſtrosłupa.

Aże

Aże się pokazało, iż pierwszy poprzednik mnieyszy iest od drugiego, więc i pierwszy następnik powinienby być mnieyszy od drugiego, co iednak być nie może.

Więc stosunek dwóch tych Ostrosłupow, nieróżni się od stosunku ich podstaw,

107. *Uwaga.* Użyliśmy iuż tego sposobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w Części I. Dowiodłszy albowiem, iż obwody dwòch Wielokątów foremnych, z iednaką liczbą boków, wpisanych, lub opisanych, dwóm kołom, tak się do siebie maią, iak tych kół promienie; pokazawszy oraz, iż różnica obwodu koła, od obwodu Wielokąta wpisanego, lub opisanego, mnieyszą być może od iakieykolwiek ilości naznaczoney, wywiedliśmy ztąd proporcyonalność okręgów kół, do ich promieni. Dowiedliśmy także równości koła z Tróykątem maiącym za wysokość promień iego, a za podstawę, okrąg; a to z podobney własności Wielokąta na kole opisanego,

W którymkolwiek z tych przykładów, nap: w ostatnim, koło iest granicą między Wielokątami wpisanemi, i opisanemi, do

którey

którey każdy z nich, tym bardziey się zbliża, im więceyboków mu damy, tak dalece, że przyiść można do tego, iż ich obwody ròżnić się od siebie będą mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość naznaczona, a tym mniey ieszcze różnić się będą ich obwody od okręgu koła. Wielokąty podobne na dwòch kołach opisane, zawsze tę maią własność, iż są proporcyonalnemi tychże kol promieniom. Łącząc te z sobą własności, wypadło z nich, że i granice tych Wielokątów, to iest koła, też samę własność maią; lubo choćby ie na więcey coraz cząstek podzielić (byleby ich liczba była skończona) nieprzyidziemy nigdy do tego, abyśmy cale zgubili tę różnicę która zachodzi między Wielokątem, i kołem, to iest, abyśmy Wielokąt cale na koło iemu równe zamienili.

Ten sposob postępowania, nazywa się *sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, którym się to, i sprawiedliwie niezdawało, aby linije krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiey, maleńkich liniy prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbior bardzo wielu powierzchni płaskich, małości nad-

zwyczayney; bryły także krzywe, aby uważać iak *Wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę, boków maiące.

Po tych, ktòre się tu dały obiaśnieniach, obeydzie się w następuiących podaniach, bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego sposobu *wyczerpania*. Dosyć będzie okazać, że powierzchnie krzywe i Bryły niemi zakończone, o których mamy mòwić, zawarte zawsze są między powierzchniami lub Bryłami, o ktòrych iuż mowiliśmy, a ktòre mogą się rożnić od siebie mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość podana. Gdy zaś przyidzie mòwić o ścianach Brył, o ich *warstach* (laminæ) i t. d, tedy rozumiem, że przez poprzedzaiące obszerne obiaśnienia, dosyć się wytłumaczyło, iak dalecy być powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaszczyzn, i od uważania Brył, iakoby złożonych z powierzchni usłanych iednych nad drugiemi.

ROZ-

ROZDZIAŁ VII.

O Walcach.

108

~~180.~~ NIech będą dwa koła rowne nakreślone na dwòch płaszczyznach rownoodległych. Przez liniią łączącą ich środki, niech przechodzi iakakolwiek inna płaszczyzna. Niech będą złączone inną liniią końce dwòch promieni znayduiących się po iedney stronie linii łączącey środki, i służących za spolne przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyznami dwòch koł; niechay ta liniia końce dwòch promieni łącząca obraca się rownym wszystkich iey punktòw ruchem, około okręgòw tych dwòch koł. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii naznaczona, nazywa się *powierzchnią Walcową*. Bryła zakończona temi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcem* (Cylinder:) Liniia prosta łącząca środki tych dwòch koł, nazywa się *Osiątego* Walca. (Axis) Dwa koła na ktòrych się Walec kończy, nazywaią się iego *podstawami*. Prostopadła spuszczona od punktu ktòregokolwiek, iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiey, nazywa się *wysokością* Walca. Gdy oś

 Walca

Walca, albo liniia łącząca środki dwòch podstaw iego, prostopadłą iest do płaszczyzn podstaw, Walec zowie się *prostym*, gdy zaś ta oś iest pochyłą do tychże płaszczyzn, wtedy Walec zowie się *ukośnym*.

109. *Wniosek*. Liniia robiąca obrotem swoim powierzchnią walcową, ròwnoodległą iest w początkowym swoim położeniu, od osi walca [bo ta liniia z osią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokącie tym, ktòrego dwoma innemi bokami, są dwa promienie koł ròwne i rôwnoodległe). Ze zaś ta liniia zawsze iest od pierwszego swego położenia ròwnoodległą, więc zawsze będzie ròwnoodległą od osi. Wzaiemnie, gdy przez punkt ktòrykolwiek powierzchni walcowey pociągniemy liniią, równoodległą od osi, ta liniia zmiesza się z linią ktòra obrotem swoim kreśli powierzchnią Walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta liniia znaydować się będzie na powierzchni walcowey. Liniia ròwnoodległa od osi, a przechodząca przez punkt ktòrykolwiek powierzchni walcowey, nazywa się *bokiem* Walca; wszystkie zatym boki Walca są równe, a wszczegulności rownaią się osi.

110. *Twierdz.* 1. Przeciąwszy Walec płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to będzie kołem.

Niech będzie CAac, połową przecięcia Walca, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego Cc, i niech BD będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey równoodległey od podstawy. Tab. V. Fig. 1.

Przecięcie Walca przez tę drugą płaszczyznę, będzie kołem.

Dowodz: Bok Aa, Walca iest od osi Cc równoodległym; przecięcia także BD, CA płaszczyzny przechodzącey przez oś, i dwóch płaszczyzn równoodległych, są równoodległemi; więc Czworokąt: ACBD, iest Równoległobokiem, a zatym bok BD, równa się bokowi AC.

Tymże sposobem okazać można równość wszystkich liniy prowadzonych od punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni Walcowey, przez płaszczyznę równoodległą od podstawy; a zatym to przecięcie iest kołem, którego środkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe, a wszczegulności, równe są podstawie.

111. *Wniosek.* Ztąd wynika inny sposob. ktòrym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek Walca, to iest przez ruch koła taki, ktòrymby się to koło w rowney zawsze od pierwszego swego położenia odległości posuwało, a ieden z punktòw iego nie schodził nigdy z linii prostey daney co do iey położenia.

W szczegulności zaś, Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem Rownoległoboku prostokątnego, około iednego z bokòw iego.

112. *Twierdz:* 2. Powierzchnia krzywa (g) Walca prostego, rowna się Prostokątowi, ktòryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

Dowodz: Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niey dwa Wielokąty foremne, z rowną liczbą bokòw, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważaymy iakoby zrobione Graniastosłupy proste,

(g) *Powierzchnią krzywą Walca nazywamy tę, w ktòrą niewchodzą podstawy Walca.*

ste, teyże co i Walec wysokości; powierzchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniastosłupów równe będą względem Prostokątów maiących wysokość Walca; podstawy zaś równe obwodom tych Wielokątów, a zatym te dwie powierzchnie pobocznych ścian Graniastosłupów, tak się mieć do siebie będą, iak obwody tychże Wielokątów. Tym mniey więc różnić się od siebie będą te dwie powierzchnie, im mniey brakować będzie tym Wielokątom do rowności, to iest, im większa liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mnieysza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a tym bardziey powierzchnia krzywa, może się mniey ieszcze różnię od iedney z tamtych powierzchni; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I.) powierzchnia krzywa Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu wysokość tego Walca, a podstawę równą okręgowi podstawy iego.

113, *Wnioski* 1. Powierzchnie krżywe Walców prostych, iednakiey wysokości, tak się do siebie maią, iak promienie ich podstaw.

2. Powierzchnie krzywe Walców prostych maiących równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

3. Powierzchnia cała Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość summę z wysokości Walca, i z promienia podstawy iego, (ponieważ summa z powierzchni dwóch podstaw Walca, rowna iest Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg,a za wysokość, promień iedney z tych podstaw). Jest zatym powierzchnia cała Walca prostego proporcyonalna Prostokątowi, ktòryby miał za boki, promień podstawy Walca, i summę z tegoż promienia i z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia, iest iednostaynym,)

114. *Uwaga.* Można okazać, iź wyznaczenie powierzchni krzywey Walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do iego osi; ale że wyznaczenie tego obwodu, większey niż początkowey Geometryi wiadomości wyciąga, przeto nie może być przez nię wyznaczona i powiezchnia krżywa Walca ukośnego.

115. *Twierdz:* 3. Dwa Walce rowne ſą w bryłowatości, ktorych tak podſtawy iako i wyſokości, ſą rowne.

Dowodz: Wpiſawſzy, i opiſawſzy podſtawom tych dwoch Walców, Wielokąty foremne, o iednakowey liczbie bokow, a zrobiwſzy na tych Wielokątach, Graniaſtoſłupy rowney z Walcami wyſokości, maiące ściany rownoodległe względem oſi tych Walców; rożnica Graniaſtoſłupa opiſanego na iednym z tych Walców, od Graniaſtoſłupa w tenże Walec wpiſanego, rownać ſię będzie Graniaſtoſłupowi maiącemu tę ſamę, co tamte dwa wyſokość, a podſtawę rowną rożnicy dwoch ich podſtaw. A że rożnica tych dwoch podſtaw, mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; więc też i rożnicę dwoch Graniaſtoſłupow, wpiſanego i opiſanego, można uczynić mnieyſzą od iakieykolwiek ilości naznaczoney, a tym bardziey rożnica iednego z tych Graniaſtoſłupa, od Walca może być mnieyſzą uczyniona, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Ze zaś dwa Graniaſtoſłupy podobne, nap: opiſane na tych dwoch Walcach ſą rowne, więc też i te dwa Walce ſą rowne

wne, (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania.)

116. *Twierdzenie* 4. Walce z równemi podstawami, maią się do siebie, iak ich wysokości.

117. *Twierd*, 5. Walce z równą wysokością maią się do siebie, iak ich podstawy.

Dowodzenie tych dwóch Twierdzeń to samo iest prawie, co i dowodzenie Twierzenia 3; położywszy stosunki nie równości podstaw, lub wysokości, na mieysce stosunków równości.

118. *Wnioski*. Cokolwiek się powiedziało o porownywaniu Graniastosłupow maiących podstawy rożnego gatunku, wszystko to przystosować można do porownywania Walcow z Graniastosłupami. Walec równy naprzykład iest iakiemukolwiek Graniastosłupowi maiącemu rowną z nim podstawę i wysokość. Walec tak się ma Graniastosłupa teyże co on wysokości, iak podstawa tego Walca, do podstawy Graniastosłupa, a zatym Walec tak się ma do Graniastosłupa teyże co i on wysokości, a którego podstawa

iest

ieſt Wielokątem opiſanym na podſtawie Walca, iak podſtawa Walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, to ieſt, iak obwod podſtawy Walca, do obwodu podſtawy Graniſtoſłupa; nap: Walec, ktòrego wyſokość ròwna ſię średnicy podſtawy iego, tak ſię ma do Sześcianu tey średnicy, iak okrąg koła, do teyże średnicy wziętey 4 razy.

Gdy Walec ròwny ieſt Graniaſtoſłupowi w bryłowatości, wyſokość ich będzie w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, i znowu, ieżeli wyſokości ſą w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, tedy Walec równa ſię Graniaſtoſłupowi.

Stoſunek dwòch Walców, może podobnie, iak i ſtoſunek Graniaſtoſłupow, wyłożonym być w liniiach ſpoſobem naſtępuiącym: Wyraźmy w liniiach ſtoſunek ich podſtaw; znalazſzy trzecią proporcyonalną do promienia Walca pierwſzego, i do promienia Walca drugiego. Do wyſokości Walca pierwſzego, do wyſokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, ſzukaymy czwartey proporcyonalney; ſtoſunek promienia Walca pierwſzego, do tey czwartey proporcyonalney, ròwny będzie ſtoſunkowi

bryło-

bryłowatości pierwſzego Walca, do bryłowatości drugiego.

Przykład liczebny. Niech będzie promień podſtawy drugiego Walca, trzy razy tak wielki iak promień podſtawy pierwſzego; wyſokość zaś drugiego Walca, niech będzie cztery razy tak wielka, iak wyſokość pierwſzego. Trzecia proporcyonalna do promienia Walca pierwſzego i do promienia Walca drugiego, będzie 9. razy tak wielka, iak promień pierwſzego Walca; a ponieważ wyſokość drugiego Walca, 4 razy ieſt tak wielka iak wyſokość pierwſzego, będzie więc czwarta proporcyonalna do wyſokości pierwſzego Walca, do wyſokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, cztery razy tak wielka, iak ta trzecia proporcyonalna, to ieſt: 36 razy tak wielka iak pierwſzy promień, a zatym drugi Walec zawiera w ſobie pierwſzy, razy 36. Jakoż, gdyby podſtawa drugiego Walca zawierała w ſobie razy 9 podſtawę pierwſzego, a wyſokość ich była równa, tedy drugi Walec byłby 9 razy tak wielki iak pierwſzy; a że nadto wyſokość drugiego Walca zawiera w ſobie razy 4, wyſokość pierwſzego, będzie więc i z tey miary drugi Walec 4 razy

razy tak wielki, iak pierwſzy, a z obydwóch razem tych miar będzie 36 razy tak wielki, iak pierwſzy.

Co ſię zaś tycze miary liczebney iakiego Walca, ta będzie znaleziona, wyraziwſzy nayprzod w liczbach, powierzchnią iego podſtawy (podług tego co ſię powiedziało o powierzchni koła,) a potym rozmnożywſzy tę liczbę przez inną, oznaczaiącą wyſokość Walca.

119. *Uwaga.* Wyznaczenie dokładne tak powierzchni krzywey Walca proſtego, iakoteż i całey iego powierzchni; to ieſt dokładne porównywanie tey powierzchni z powierzchnią proſtą, nap: z kwadratem, zawiſło od ſkwadrowania koła; a zatym od wyproſtowania iego okręgu. Toż mowić i o bryłowatości Walca, czyli o dokładnym porownywaniu tey bryłowatości z bryłowatością nap: Sześcianu.

Wyznaczenie wielkości kawałków Walca, maiących zapodſtawy, wycinki, lub odcinki koła, zawiſło także od wyznaczenia Walca; ponieważ te kawałki tak ſię maią do Walca całego, którego

ſą

ſą częściami, iak ich podſtawy do koła ſłużącego za podſtawę temu Walcowi. (h)

ROZDZIAŁ VIII.

O Oſtrokręgach.

120. DEfin: Niech będzie koło nakreślone naiakiey płaſzczyźnie i niech od punktu nad tą płaſzczyzną znayduiącego ſię, wyciągniona liniia lub nitka, obraca ſię około okręgu, tego koła. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii lub nitki naznaczona nazywa ſię *powierzchnią Oſtrokręgu*; Bryła zakończona przez tę powierzchnią i koło, około ktòrego nitka ſię obracała, nazwiemy *Oſtrokręgiem* (Conus), koło, na którym Oſtrokrąg ſtoi, nazwiemy *podſtawą* iego; *wierz-*

(*h*) *Lubo niektòre części powierzchni Walcowey ſame przez ſię wyznaczyć można; nie można iednak wyznaczyć ich ſtoſunku do całey powierzchni Walca. Toż mòwić i o częściach Walca, których bryłowatości mogą być wyznaczone. Ale ta rzecz bardziey ieſt ciekawa, niż użyteczna, dla tego też doſyć ieſt o tym namienić.*

wierzchołkiem zaś, punkt ten, od którego nitka była wyciągniona. Liniia od tego wierzchołku do środka podstawy prowadzona, nazywa się *Osią* Ostrokręgu, a prostopadła spuszczona od wierzchołku do płaszczyzny podstawy: nazywa się *wysokością*. Gdy oś iest prostopadłą do płaszczyzny podstawy, Ostrokręgu; Ostrokrąg nazywa się *prostym*; gdy zaś ta oś nie iest do płaszczyzny podstawy prostopadłą, Ostrokrąg nazywa się *ukośnym*.

121. *Wniosek*. Poprowadziwszy liniią od wierzchołku Ostrokręgu do któregokolwiek punktu Okręgu podstawy iego, ta liniia zmieszasię wtedy z nitką rodzącą obrotem swoim, powierzchnią Ostrokręgu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez ten punkt okręgu podstawy; a zatym ta liniia cała będzie na powierzchni krzywey tego Ostrokręgu. —

Liniia poprowadzona od wierzchołku Ostrokręgu powierzchni iego krzywey, aż do okręgu podstawy, nazywa się *bokiem* Ostrokręgu. —

122. *Twierdz: I.* Gdy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek Ostrokręgu iakiegożkolwiek przecina go, przecięcie to iest zawsze Tróykątem.

Dowo-

Dowodz: Liniie poprowadzone na tey płaſzczyznie od wierzchołku Oſtrokręgu, do dwòch punktòw okręgu, w ktòrych go ta płaſzczyzna przecina, będą bokami Oſtrokręgu, i ſpolnemi powierzchni iego krżywey, z tą płaſzczyzną przecięciami; a zatym przecięcie Oſtrokręgu przez tę płaſzczyznę, będzie Tròykątem maiącym za podſtawę, ſpolne przecięcie tey płaſzczyzny, z płaſzczyzną podſtawy Oſtrokręgu, a za boki, dwie liniie poprowadzone od wierzchołku, do punktòw przecięcia okręgu, od płaſzczyzny przechodzącey przez wierzchołek,

123. *Twierdz*: 2. Gdy Oſtrokrąg przecięty ieſt przez płaſzczyznę ròwnoodległą od iego podſtawy, przecięcie to ieſt kołem.

Tab. V. Fig: 2. Niech Tròykąt ASB wyraża iakiekolwiek przecięcie Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącey przez iego Oś, SC; niech liniia DFE wyraża ſpolne przecięcie tey płaſzczyzny i inney ròwnoodległey od podſtawy.

Tròykąty SCB, SFE, ſą podobne; więc $SC : CB = SF : FE$. Aże płaſzczyzna przecinaiąca Oſtrokrąg ròwnoodlegle od

podſtawy

podſtawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy pierwſze wyrazy tey proporcyi ſą ſtałe iakiżkolwiek będzie promień podſtawy przez ktòrą, a razem i przez oś przechodzi płaſzczyzna; więc też i czwarty wyraz ieſt ſtałym. Poprowadziwſzy tedy liniie od punktu F, do okręgu przecięcia, te liniie równe zawſze będą, a zatym to przecięcie ieſt kołem, którego punkt F, ieſt środkiem.

124. *Wnioſki.* Te koł powierzchnie tak ſię do ſiebie maią, iak kwadraty ich promieni, albo iak kwadraty odległości ich od wierzchołka. (To podanie ieſt wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy Oſtrokrąg ieſt proſtym, wtedy wſzyſtkie płaſzczyzny, równoodległe od podſtawy, ſą do Oſi proſtopadłemi; a ztąd, można uważać Oſtrokrąg proſty, iakoby zrobiony obrotem Tróykąta proſtokątnego, około iednego z ramion kąta iego proſtego. To ramie będzie Oſią Oſtrokręgu, drugie, naznaczy powierzchnią podſtawy, przeciwproſtokątna zaś, naznaczy powierzchnią krzywą Oſtrokręgu.

125. *Twierdz: przybrane* 1. Gdy liniia poprowadzona na płaszczyznie podstawy Ostrokręgu, dotyka się tey podstawy; płaszczyzna przez tę liniią i przez bok Ostrokręgu do punktu dotknięcia, ciągniony, przechodząca, wszystkie inne punkta swoie mieć będzie za Ostrokręgiem; to iest: nic spolnego z Ostrokręgiem nie będzie miała, oprocz boku, przez który przechodzi,

Tab. V. Fig. 3. Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez Oś SC, i przez podstawy promień CA. Niech AT, będzie styczną z tą podstawą, w końcu A, promienia CA; Płaszczyzna przechodząca przez liniie: SA, AT, będzie mieć za Ostrokręgiem, wszystkie punkta swoie, które nie są w linii SA.

Dowodz: Niech płaszczyzna iakakolwiek równoodległa od podstawy, Ostrokrąg przecina; niech *ca*, będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey przez oś przehodzącey; niech ieszcze *at* będzie przecięciem teyże płaszczyzny, i drugiey przechodzącey przez liniie: SA, AT. Liniie: *ca*, *at*, będą równoodległemi względem liniy: CA, AT;

a zatym

a zatym kąt *cat*, będzie równy kątowi CAT. Aże kąt CAT ieſt proſtym, więc proſtym także będzie i kąt *cat*; a zatym, oprocz punktu *a*, linii *at*, każdy inny punkt, teyże linii, będzie w większey od środka *c*, odległości, niżeli promień *ca*, to ieſt: niżeli odległość punktu na powierzchni Oſtrokręgu, i oraz na płaszczyznie *cat*, znayduiącego ſię, od punktu Oſi, do teyże płaſzczyzny należącego. Każdy tedy inny punkt tey linii *at*, oprocz punktu *a*, ieſt za okręgiem. ——

126. *Defin:* O tey płaſzczyznie mowi ſię, iż ſię *dotyka Oſtrokręgu*, ktòra iednę tylko liniią ma ſpolną z powierzchnią krzywą Oſtrokręgu.

127. *Wnioſek.* Opiſawſzy Wielokąt na podſtawie Oſtrokręgu, a przez wierzchołek tego Oſtrokręgu, i przez boki Wielokąta przeciągnąwſzy płaſzczyzny; ponieważ te boki Wielokąta opiſanego, ſłużyć będą za podſtawy ścian Oſtrogranu, wierzchołek zaś iego, będzie ten ſam, co i wierzchołek Oſtrokręgu, więc ściany tego Oſtrogranu dotykać ſię będą powierzchni Oſtrokręgu. Oſtrogran ten nazywa ſię opiſanym na Oſtrokręgu inny zaś, któryby ſpolny z Oſtrokręgiem

 miał

miał wierzchołek, a za podſtawę Wielokąt wpiſany w podſtawę Oſtrokręgu, nazywałby ſię w Oſtrokrąg *wpiſanym.*

128. *Twierdz: przybrane* 2. Maiąc dany Oſtrokrąg proſty, można weń wpiſać, i opiſać na nim dwa Oſtrograny foremne, którychby ſtoſunek powierzchni ściennych bardziey ſię zbliżał do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek naznaczony ſtoſunek nierówności.

Powierzchnie ścienne tych dwóch Oſtrogranów, równaią ſię Tróykątom, maiącym za podſtawy, obwody podſtaw Oſtrogranów, a wyſokości zaś, równe wyſokościom iedney z ścian każdego Oſtrogranu; a zatym tak ſię do ſiebie maią te Oſtrograny, iak te dwa Tròykąty. Aże podſtawy tych dwòch Tròykątòw, tak ſię maią do ſiebie, iak proſtopadłe ſpuſzczone od środku, do dwóch którychkolwiek bokòw podſtaw Oſtrogranu; więc te powierzchnie ścienne, tak ſię też do ſiebie mieć będą, iak Tròykąty ròwney z ścianami Oſtrogranów wyſokości, a maiące za podſtawy, te proſtopadłe; albo iak Proſtokąty, teyże z dwiema temi Tróykątami podſtawy i wyſokości. Że zaś ſtoſunek takich dwóch

Pro-

Proſtokątów, może być bardziey przybliżonym do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności, to ſię tak dowodzi.

Niech będzie SCA, przecięcie Oſtrokręgu proſtego, od płaſzczyzny przechodzącey przez oś tego Oſtrokręgu i przez wyſokości SA, SB, dwochścian Oſtrogranów foremnych, i maiących za podſtawy, Wielokąty z równą liczbą boków; ieden z tych Oſtrogranów niech będzie opiſanym na Oſtrokręgu, a drugi weń wpiſanym. Tab. V. Fig. 4.

Powierzchnia ścienna Oſtrogranu opiſanego proporcyonalna ieſt z Proſtokątem CA przez SA, a powierzchnia ścienna Oſtrogranu wpiſanego, proporcyonalna ieſt Proſtokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoodległą od SA. Powierzchnia ścienna Oſtrogranu, maiącego za podſtawę, podſtawę Oſtrogranu wpiſanego, a za wyſokość liniią CD, takby ſię miała do powierzchni ściennej, Oſtrogranu opiſanego, iak Proſtokąt: CB × BD do Proſtokąta CA × AS; to ieſt (dla podobieńſtwa Tróykątów SAC, DBC) iak kwadrat z CB, do kwadratu z CA; albo iak powierzchnie podſtaw, dwóch

Oſtro-

Ostrogranów. A że się dowiodło w Rozdziale o kwadrowaniu koła w Części I. że te dwie powierzchnie bardziey mogą być zbliżonemi do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności, więc też i stosunek powierzchni ściennych, tych dwóch Ostrogranów, bliższy może być stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności. Że zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu, którego SCA iest przecięciem, mniey się różni od Ostrogranu, którego przecięciem iest: SCB, niżeli od Ostrogranu, którego przecięciem iest: DCB, więc tym bardziey stosunek powierzchni ściennych dwóch Ostrogranów, iednego wpisanego, drugiego opisanego, mniey się różnić może od stosunku równości, niżeli od tegoż stosunku różni się iakikolwiek dany stosunek nierówności.

129. *Twierdz.* 3. Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, równa się Tróykątowi maiącemu za podstawę obwod podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok Ostrokręgu.

Dowodz. Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego iest Granicą między powierz-

wierzchniami ściennemi Oſtrogranów proſtych weń wpiſanych i na nim opiſanych. Aże ſtoſunek takich dwóch powierzchni Oſtrogranów, może być do ſtoſunku równości bardziey przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności, więc tym bardziey ſtoſunek powierzchni Oſtrokręgu proſtego, do powierzchni iednego z tych Oſtrogranów, nap: opiſanego, mniey ſię różnić może od ſtoſunku równości, niżeli ſię od tegoż ſtoſunku różni iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Oſtrogranu opiſanego, równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość, bok Oſtrokręgu, a za podſtawę obwod podſtawy, tego Oſtrogranu; więc (podług tego co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, a wſzczegulności w Rozdziale o kwadrowaniu koła, że powierzchnia koła, równa ſię Troykątowi maiącemu za podſtawę obwod koła, a za wyſokość, promień iego): Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego, ieſt też równa Troykątowi, któryby miał za podſtawę obwod podſtawy Oſtrokręgu, a za wyſokość bok iego.

130. *Wnioſek.* Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego, równa ſię wy-

cinko-

cinkowi koła, któreby miało za promień, bok Ostrokręgu, a którego łuk równyby był w długości okręgowi podstawy Ostrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, równa się także Tróykątowi, maiącemu za wysokość bok Ostrokręgu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy Ostrokręgu.

131. Dla znalezienia ważności kątowey, tego wycinku, następuiąca czyni się proporcya: Jak się ma bok Ostrokręgu, do promienia podstawy iego, tak się ma 360° do ważności kątowey, którey szukamy.

Jakoż, gdyby bok Ostrokręgu, był dwa, trzy, i t.d. razy większy od promienia podstawy, tedy okrąg cały maiący za promień bok Ostrokręgu.byłby dwa, trzy i t.d. razy większy od okręgu podstawy; a zatym i łuk pierwszego koła, któryby się równał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią, częścią i t. d. okręgu, do którego należy.

132. *Defin:* Niech będzie Ostrokrąg przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy iego, Bryła zakończona z iedney strony, podstawą Ostrokręgu a z

dru-

drugiey tym przecięciem, nazywa się *Oftrokręgiem ściętym* (Conus truncatus.)

133. *Twierdz: 4.* Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego ściętego, równa ſię Proſtokątowi maiącemu za wyſokość, bok tego Oſtrokręgu ściętego, a za podſtawę, liniią równą takiemu okręgowi, którego promieniem byłaby połowa ſummy promieni do dwóch podſtaw Oſtrokręgu tegoż ściętego należących; to ieſt średnia arytmetyczna między dwoma temi promieniami.

Niech Tròykąt SCA, wyraża połowę przecięcia Oſtrokręgu proſtego, od płaſzczyzny przechodzącey przeź oś iego. Niech tenże Oſtrokrąg będzie ieſzcze przecięty płaſczyzną równoodległą od podſtawy, a ſpolnym tey płaſzczyzny z pierwſzą przecięciem, niech będzie: *ca*. Przecięcie: CAac, oznaczy przecięcie Oſtrokręgu ściętego. Pociągniymy liniią AB, proſtopadłą do boku SA, i równą okręgowi koła, którego promieniem ieſt: CA. Tròykąt SAB, będzie równy powierzchni krzywey Oſtrokręgu całego: poprowadźmy ieſzcze liniią *ab*, równoodległą od AB, i ſpotykaiącą w punkcie *b*, liniią SB. Ta liniia *Tab. V. Fig. 5.*

ab,

ab, będzie też równa okręgowi koła, którego, promieniem ieſt: *ca*, a Tróykąt Sab, równać ſię będzie powierzchni krzywey Oſtrokręgu Sac; będzie zatym Czworokąt ABba, równy powierzchni krzywey Oſtrokręgu ściętego caCA.

Podzielmy teraz liniią Aa, na dwie części równe w punkcie: E. i poprowadźmy EF, równoodległą od AB.

Ta liniia EF, będzie równa okręgowi koła, którego promień równałby ſię linii: ED, to ieſt średniey Arytmetyczney między promieniami, CA, i *ca*, dwóch podſtaw Oſtrokręgu ściętego; a przeto powierzchnia Czworokąta ABba, równa ſię Proſtokątowi AHGa, maiącemu za wyſokość, bok Aa, Oſtrokręgu ściętego, a za podſtawę liniią EF równą okręgowi średnie arytmetycznie proporcyonalnemu, między okręgami dwóch podſtaw tegoż Oſtrokręgu.

134. *Uwaga* I. Wyrażenie naſtępujące powierzchni krzywey Oſtrokręgu proſtego, czyli to całego, czyli też ściętego, poſłuży nam, gdy mówić będziemy o powierzchni *kuli* (Sphera.)

Od

Od środku E, linii Aa, wyciągniymy liniią Ei prostopadłą do Aa, spotykaiącą oś SC, w punkcie I. Poprowadźmy i drugą liniią aL, rownoodległą od SC, a prostopadłą do AC.

Summa kątow IED, DEa, rowna się kątowi prostemu; tak iako i summa kątow: AaL, DEa; więc te dwie summy są sobie rowne; a zatym kąt IED, rowna się kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa Troykąty prostokątne: IED, AaL, a zatym boki ich będą proporcyonalne; więc, JE : ED = Aa : aL, (albo Cc) a ztąd i okręgi, maiące za promienie, liniie: IE, ED, są też do siebie, iak liniie: Aa, Cc; a zatym Prostokąt z linii Cc, przez okrąg, ktorego liniia IE, byłaby promieniem, rownałby się Prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, ktoryby miał za promień, liniią ED. Aże ten drugi Prostokąt rowny iest powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego; więc też i pierwszy byłby rowny teyże Ostrokręgu ściętego powierzchni. Jest tedy powierzchnia krzywa Ostrokręgu ściętego, rowna Prostokątowi maiącemu wysokość rowną wysokości Ostroręgu ściętego, a podstawę rowną okręgowi takiego koła, ktorego promieniem byłaby prostopadła, od środku boku Ostrokręgu ściętego wyciągniona, aż do

iego

iego ofi, która to proftopadła ieft czwartą geometrycznie proporcyonalną, do wyfokości Oftrokręgu ściętego, do iego boku, i do średniey arytmetyczney między dwoma promieniami; co wfzyftko łatwo przyftofować można i do Oftrokręgu ściętego.

135. *Uwaga* 2. Wyznaczenie więc dokładne powierzchni Oftrokręgu, lub iey części, zawifło od wyproftowania okręgu koła.

Co fię tycze Oftrokręgu ukośnego, ieszcze cięższey ieft wyznaczyć powierzchnią iego krzywą, niżeli Walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierówności iego boków, a zatym z nierówności ścian Oftrogranów, z podftawami foremnemi, opifanych lub opifać fię mogących na tym Oftrokręgu.

136. *Twierdz. przybrane* Bryłowatości dwòch Oftrogranów z podftawami foremnemi, iednego wpifanego w Oftrokrąg, a drugiego na nim opifanego, różnica może być mnieyfza, niż iakakolwiek ilość naznaczona; to ieft ftofunek ich bryłowatości, może bardziey być przybliżonym do ftofunku rowności, niż iakikolwiek dany ftofunek nierówności.

Dowodz:

Dowodz: Różnica tych dwóch Ostrogranów, równa się Ostrogranowi teyże co one wysokości, a którego podstawa byłaby równa różnicy ich podstaw. Aże stosunek tych podstaw, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż dany iakikolwiek inny stosunek nie równości, więc też i stosunek tych dwóch Ostrogranów, może się zbliżyć do stosunku równości bardziey niż inny dany iakikolwiek stosunek nie równości. Zamieniwszy różnicę dwóch Ostrogranów, na trzeci Ostrogran teyże co one wysokości, można będzie wpisać i opisać podstawie Ostrokręgu dwa Wielokąty, z równą liczbą boków, takie, którychby rożnica mnieysza była od podstawy tego trzeciego Ostrogranu, a tym bardziey ieden z Ostrogranów. wystawionych na tych Wielokątach, równey z Ostrokręgiem wysokości, mniey się różnić będzie od Ostrokręgu, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdz.* 5. Bryłowatość iakiegokolwiek Ostrokręgu, iest trzecią częścią bryłowatości Walca równey z Ostrokręgiem podstawy i wysokości.

Dowodz: Ostrograny i Graniastosłupy *iednoimienne* (eiusdem nominis) wpisane,

lub

lub opiſane, pierwſze na Oſtrokręgu, a drugie na Walcu, iednakiey z niemi wyſokości, ſą trzecią częścią pierwſze względem drugich. Aże te Oſtrograny i Graniaſtoſłupy mogą ſię różnić pierwſze od Oſtrokręgu, drugie od Walca, na którym ſą nap. opiſane, mniey niż iakąkolwiek daną ilością; więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania) Oſtrokrąg ieſt też trzecią częścią Walca.

138. *Wnioſek.* Cokolwiek mowiliśmy o porównywaniu Walców, zawiſłym od ich wyſokości, i podſtaw, można to wſzyſtko i do Oſtrokręgów przyſtoſować, które trzecią ich ſą częścią; podobnie iakośmy i to co ſię mówiło o porownywaniu Graniaſtoſłupów, do Oſtrogranów przyſtoſowali. J tak.

1. Oſtrokręgi, których podſtawy ſą równe, maią ſię do ſiebie, iak ich wyſokości.

2. Oſtrokręgi, których wyſokości ſą równe, maią ſię do ſiebie, iak ich podſtawy.

3. Oſtrokręgi, których bryłowatości ſą równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości.

4.

4. Oſtrokręgi, ktòrych podſtawy mają ſię do ſiebie, w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości, ſą równe.

5. Stoſunek dwóch Oſtrokręgòw w liniiach wyrażony, tak ſię znayduie: zamienia ſię ſtoſunek podſtawy iednego, do podſtawy drugiego na ſtoſunek linii do linii; znayduiąc trzecią proporcyonalną do promienia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, i do promienia podſtawy drugiego. Zamienia ſię także ſtoſunek wyſokości pierwſzego Oſtrokręgu, do wyſokości drugiego, na ſtoſunek trzeciey proporcyonalney znalezioney, do czwartey. Stoſunek promienia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie ſtoſunkowi pierwſzego Oſtrokręgu, do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowatości Oſtrokręgu, znayduiemy; mnożąc liczbę oznaczaiącą wielkość powierzchni podſtawy iego, przez liczbę oznaczaiącą wielkość wyſokości, a potym tey liczby rozmnożoney biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowatości Oſtrokręgu, zawiſło od wyznaczenia

nia

nia dokładnego, iego podstawy, a zatym od wyprostowania okręgu koła.

Bryłowatość Ostrokręgu, równa się bryłowatości iakiegokolwiek Ostrogranu, równey z Ostrokręgiem wysokości i podstawy.

139. *Twierdz:* 6. Bryłowatość Ostrokręgu prostego, równa się bryłowatości Ostrokręgu innego, którego powierzchnia podstawy byłaby równa, powierzchni całey Ostrokręgu prostego, a wysokość, równa promieniowi koła wpisanego w Tróykąt równoramienny wyrażaiący przecięcie Ostrokręgu prostego od płaszczyzny przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie ASB przecięcie Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przez oś iego przechodzącey.

Tab. V. Fig: 6. Niech będzie SC prostopadła do AB, wysokością, czyli osią tego Ostrokręgu. Podzielmy ieden z kątów przy podstawie AB, nap: kąt A, na dwie równe części, przez liniią AD, i prowadźmy ią aż do punktu D, prostopadłey SC; od tegoż punktu D, niech idzie prostopadła DE

DE do SA. Liniie równe DC, DE, będą promieniami, koła wpiſanego w Tròykąt przechodzący przez oś Oſtrokręgu.

Powierzchnia podſtawy Oſtrokręgu, tak ſię ma do iego powierzchni krzywey, iak AC, do AS; a zatym powierzchnia podſtawy, tak ſię mieć będzie do całey powierzchni Oſtrogręgu, iak AC do AC+AS, albo iak AC^2 do AC (AC+AS); więc powierzchnia cała Oſtrokręgu równa ſię kołu maiącemu za promień średnią geometryczną między promieniem AC podſtawy Oſtrogręgu, i ſummą z tego promienia i z boku Oſtrokręgu. Aże liniia AD, dzieli kąt CAS na dwie równe części więc AS : AC = SD : CD; i AS+AC : AC = SD+CD : CD; a nakoniec (AS+AC) AC : AC^2 = SC : CD.

Więc Oſtrokrąg maiący za promień podſtawy, średnią geometryczną między AC, i $\overline{AC+AS}$, a za wyſokość liniią CD, miałby powierzchnią ſwoię, do powierzchni Oſtrokręgu podanego, w ſtoſunku odwrotnym wyſokości; a zatym te dwa Oſtrokręgi byłyby równe. Że zaś pod-

 ſtawa

ſtawa pierwſzego Oſtrokręgu ieſt równa całey powierzchni Oſtrokręgu podanego; więc bryłowatość Oſtrokręgu proſtego, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu innego, maiącego podſtawę równą całey proſtego Oſtrokręgu powierzchni, a wyſokość równą promieniowi koła wpiſanego w Tróykąt, który ieſt przecięciem tego Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącey przez oś iego.

ROZDZIAŁ IX.

O Kuli.

140. DEfin: Niechby Połkole obracało ſię około ſwoiey średnicy. Okrąg iego przebiegnie, tym ſwoim obrotem powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *Powierzchnią kuliſtą* (ſuperficies ſpherica); całe zaś połkole obiegnie mieyſce tą powierzchnią krzywą zakończone, które ſię nazywa *Kulą* (Sphera albo Globus).

Podczas tego obrotu, każdy punkt okręgu połkola, w iednakowey zawſze byłby od iego środka odległości; a zatym i każdy punkt powierzchni kuliſtey, w iednakowey też będzie odległości od tego środka. Kula

Kula więc ieſt bryłą zakończoną przez powierzchnią krzywą, ktòrey wſzyſtkie punkta iednakowo ſą odległe od pewnego punktu nazwanego *środkiem*.

Odległość środka od punktu ktòregokolwiek powierzchni kuli, nazywa ſię *promieniem*. Liniia każda przechodząca przez środek kuli, a po obydwòch ſtronach kończąca ſię na iey powierzchni, nazywa ſię *średnicą*, i dwa razy ieſt większą od promienia. Ta zaś średnica, około ktòrey obracaiąc ſię połkole, zrobiło kulę nazywa ſię *Oſią* kuli.

Gdybyśmy przecieli kulę płaſzczyzną przechodzącą przez iey środek, wſzyſtkie punkta przecięcia powierzchni kuliſtey, przez tę płaſzczyznę, byłyby iednakowo odległe od środka kuli, który na tymże ieſt przecięciu.

Więc takie przecięcie ieſt kołem maiącym za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny, ktòra przez iey środek przechodzi, nazywa ſię *wielkim kołem kuli*.

Dwa takie koła przecinaią ſię, iedno z drugim na dwie części rowne.

N2 Jakoż

Jakoż ſpolne ich przecięcie przechodzi, przez środek kuli, a zatym i przez środek tak iednego, iak i drugiego koła; więc ieſt średnicą obydwòch. Aże średnica przecina koło na dwie równe części, więc i dwa koła wielkie kuli przecinaią ſię na dwie części ròwne.

Gdyby kula przecięta była płaſzczyzną nie przechodzącą przez iey środek, ale proſtopadłą do oſi iey obrotu, przecięcie to kuli byłoby kołem od ſpolnego przecięcia tey płaſzczyzny z płaſzczyzną połkola, nakreślonym, pod czas obrotu tegoż połkola tworzącego kulę.

Ze zaś można ſobie wyſtawić w myśli, kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot ktoregokolwiek połkola wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrotu powſtała, iednakowey zawſze ieſt wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaſzczyzną, wſzędzie przecięcie iey, będzie kołem; ponieważ można wziąść za oś kuli, tę iey średnicę, ktora do tey płaſzczyzny ieſt proſtopadłą.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny nie przechodzącey przez iey środek, nazywa ſię *małym kołem*.

Gdy przez koniec promienia kuli, przechodzi płaſzczyzna proſtopadła do tego promienia, wſzyſtkie inne punkta tey płaſzczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość któregokolwiek innego punktu tey płaſzczyzny, od środka kuli, ieſt przeciwproſtokątną Tróykąta proſtokątnego, który ma promień, za iedno ramie kąta proſtego, a za drugie, odległość tego punktu, od końca promienia. Wſzyſtkie tedy inne punkta tey płaſzczyzny ſą pośrodka odległe większą ilością, niżeli ieſt promień, a zatym ſą za kulą.

O płaſzczyznie, nie maiącey ani mieć mogącey więcey nad ieden punkt ſpolny z kulą, mówi ſię, iż ſię kuli *dotyka*. Ta zaś płaſzczyzna powinna być proſtopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnąwſzy na tey płaſzyznie iakąkolwiek liniią proſtą, ta będzie proſtopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatym liniia ta, będzie ſtyczną z tym kołem, któreby było przecięciem

cięciem kuli od płaſzczyzny przechodzącey przez tę liniią, i przez ten promień.

Jakośmy ſię zatrudniali wyżey około Walcow, i Oſtrokregow proſtych, tak teraz zatrudniać ſię będziemy około powierzchni i bryłowatości kuli, i iey części rożnych.

141. *Twierdz. przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez ktòrego punkt średni poprowadziliśmy ſtyczną, aż do iey zeyścia ſię z obydwoch ſtron, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnionemi.

Tak iednę, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części ròwne i przez punkta podziału, poprowadźmy znowu dwie ſtyczne aż do ich zeyścia ſię z promieniami przeciągnionemi przez końce tych połòw.

Część promienia przeciągnionego, zawarta między okręgiem, i pierwſzą ſtyczną, więcey niż dwa razy większa ieſt od części zawartey między okręgiem, i iedną z drugich dwòch ſtycznych.

ab. VI. Fig. 1. Niech będzie ADB, łuk koła, przez ktòrego punkt średni D, poprowadzona ieſt ſtyczna

na

na ſpotykaiąca w puuktach E, i e; promienie CB, CA przedłużone. Przez środnie punkta. F, i f, łukow: BD, AD, poprowadźmy ſtyczne: GH, Gh, ktòre ſpotykaią w punktach: G, H, h, promienie przechodzące przez końce łukòw: BD, AD.

Trzeba dowieść, iż liniia BE, więcey niż dwa razy ieſt większa od linii BH.

Niech liniia CF, ſpotyka w pukcie L, liniią Ee; Tróykąty: CDL, CFG, mogą przyſtać do ſiebie, więc liniie: DG, albo BH, i FL, ſą równe.

Poprowadźmy cięńciwę BD, ktòrą liniia CL ſpotyka w punkcie I, i BM ròwnoodległą od CL.

Tróykąty proſtokątne: BDM, JDL, ſą do ſiebie podobne; a że BD dwa razy ieſt większa od DI, więc też i BM, dwa razy większa będzie od JL; a zatym BM, więcey niż dwa razy większa ieſt od FL, albo BH. Ze zaś w Tròykącie EBM, kąt M, ieſt roztwarty, a przeto liniia BE, większa od linii BM; więc tym bardziey liniia BE, więcey niż dwa razy większa ieſt od linii BH.

§. 142.

142. *Wniosek* 1. Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów: E,H,B, spuśćmy prostopadłe: EO, HP, BQ do promienia CN; stosunek liniy: EB, HB, równy będzie stosunkowi liniy OQ, PQ. Aże EB więcey niż dwa razy iest większa od BH, więc i OQ więcey niż dwa razy większa też będzie od PQ.

143. *Wniosek* 2. Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe; 4,8,16, 32, i t. d. i przez punkta średnie podziałow, pociągniemy styczne, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzącemi przez końce każdego w szczegulności podziału; gdy nadto, od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień przedłużony CE, spuściemy prostopadłą EO, na promień CN; rożnica między odległością spodku O, tey prostopadłey, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodku Q, prostopadłey BQ, z końca B, łuku AB spuszczoney, ta mowię różnica zmnieysza się więcey niż połową za każdym następuiącym podziałem, a zatym może się na ostatek stać mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney.

144, Twierdz:

144. *Twierdz.* 1. Niech będzie łuk koła, mnieyszy od czwartey części okręgu iego, i niech ten łuk obraca się około promienia prostopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez ieden koniec tego łuku. Z drugiego iego końca spuśćmy prostopadłą na pierwszy promień, to iest na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona, tym około osi obrotem łuku, równa się Prostokątowi, maiącemu za podstawę liniią równą całemu okręgowi, którego ten łuk iest częścią; a za wysokość, liniią równą odległości środka, od spodku prostopadłey spuszczoney na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli cztery razy iest większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie prostopadłym do promienia CA, przechodzącego przez ieden koniec tego łuku. *Tab. VI Fig: 1.*

Poprowadźmy BQ, prostopadłą do CN. Niech koła czwarta część ABN, obraca się około promienia CN, iak około osi swoiey. Powierzchnia krzywa, obrotem łuku AB naznaczona, równa się Prosto-

kątowi

kątowi, któryby miał za wyſokość, liniią CQ, a za podſtawę, liniią równą okręgowi, którego CA ieſt promieniem.

Dowodz: Niech ſtyczna Ee, przechodzi przez średni punkt D. łuku AB, i niech ſpotyka w punktach E, i *e*, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku.

Dzielmy daley łuk AB, na części równe: 4,8,16,32, i t. d. a od punktu, w którym oſtatnia ſtyczna ſpotyka promień CB, przy każdym naſtępuiącym podziale, ſpuſzczaymy proſtopadłą na promień CN. Rożnica między odległością środka, od ſpodku tey proſtopadłey, a liniią CQ, zmnieyſzać ſię będzie więcey niż połową, za każdym naſtępnym podziałem; więc różnica ta, może ſię naoſtatek ſtać mnieyſzą, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Podczas obrotu łuku AB, około linii CN, każda ſtyczna kreśli powierzchnią krzywą Oſtrokręgu ściętego równaiącą ſię Proſtokątowi maiącemu za podſtawę, liniią równą okręgowi, którego promieniem, ieſt CN, a za wyſokość. odległość dwóch proſtopadłych ſpuſzczonych

nych na oś, od końcow tey ſtyczney; a zatym ſumma powierzchni krzywych, zrobionych od wſzyſtkich tych ſtycznych, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu tę ſamę podſtawę a wyſokość równą ſummie wſzyſtkich tych wyſokości; to ieſt równą odległości środka, od ſpodku proſtopadłey ſpuſzczoney na oś z punktu tego, gdzie oſtatnia ſtyczna ſpotyka promień CB. Może tedy rożnica ſummy powierzchni krzywych Oſtrokręgu zrobionych obrotem wſzyſtkich ſtycznych, mnieyſza być od Proſtokąta z taką iak ſię wyżey powiedziało podſtawą a zwyſokością CQ, niżeli iakakolwiek ilość naznaczona. Summa zaś tych wſzyſtkich powierzchni krzywych, większa ieſt zawſze od powierzchni utworzoney obrotem łuku AB; więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, i w Rozdziale o kwadrowaniu koła) powierzchnia krzywa utworzona obrotem łuku AB, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu za podſtawę, okrąg, ktòrego promieniem ieſt CA, a za wyſokość, odległość CQ, środka C, od ſpodku Q, proſtopadłey ſpuſzczoney na oś z końca B, tego łuku.

Mowiąc wſzczegulności; powierzchnia Połkuli (Hemispherium) utworzoney obro-

brotem czwartey części koła, ABN, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, ktòrego, CA iest promieniem, a za wysokość, promień CN.

A zatym powierzchnia krzywa, utworzona obrotem łuku BN, ròwna się Prostokątowi maiącemu wysokość NQ, a podstawę ròwną okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnia także całey kuli, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość średnicę kuli, a za podstawę, okrąg wielkiego iey koła, Aże powierzchnia wielkiego koła równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość połowę promienia, albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła, za podstawę.

Więc powierzchnia kuli cztery razy iest większa od powierzchni wielkiego iey koła, ktòrego promień ròwna się średnicy kuli.

145. Idzie zatym, że powierzchnia kuli, tak się ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak powierzchnia koła iakiegokolwiek, cztery razy wzięta, do kwadratu średnicy tegoż koła: Aże powierz-

wierzchnia koła, ieſt do powierzchni kwadratu średnicy iego, iak okrąg koła do iey średnicy cztery razy wziętey iako ſię w Rozdziale XIII. Części I. dowiodło) więc powierzchnia kuli tak ſię ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak cztery razy okrąg koła, do średnicy iego cztery też razy wziętey, to ieſt) iak okrąg koła, do ſwoiey średnicy. Więc wyznaczenie dokładne powierzchni kuli, zawiſło od ſkwadrowania koła, i od wyproſtowania okręgu iego.

146. Powierzchnia cała kuli, tak ſię ma do powierzchni nakreśloney obrotem łuku NB, iak ſię ma średnica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat tey średnicy, do Proſtokąta z linii NQ, i z średnicy; albo nakoniec, iak kwadrat średnicy, do kwadratu linii NB; a zatym, iak koło, ktòreby miało za promień tę średnicę, do koła, ktòreby miało za promień liniią NB; aże powierzchnia kuli ròwna ſię powierzchni pierwſzego koła; więc powierzchnia nakreślona obrotem łuku NB, równa ſię powierzchni drugiego koła.

Niech będzie NBFA, połkolę tworzące kulę obrotem ſwoim kulę; niech będzie; NEDA Tab. VI. Fig. 2.

Pro-

Proſtokąt, ktòrego podſtawą ieſt średnica tego połkola, a wyſokością promień iego. Podczas obrotu połkola, ten Proſtokąt utworzy Walec proſty, ktòrego powierzchnia krzywa zrobiona przez obrot linii ED, ròwnać ſię będzie Proſtokątowi maiącemu za wyſokość średnicę DE, albo AN, a za podſtawę okrąg podſtawy tego Walca, a zatym ta powierzchnia krzywa, ròwna ſię powierzchni kuli.

147. Podobnie ſię okaże, iż poprowadziwſzy liniią QBP, proſtopadłą do oſi, powierzchnia krzywa należąca do Walca, a zrobiona przez obrot linii EP, rowna ieſt powierzchni należącey do kuli, a zrobioney przez obrot łuku NB.

148. Walec utworzony obrotem Proſtokąta ADEN, miałby wyſokość równą średnicy podſtawy ſwoiey; dotykałyby ſię w punktach: A, i N, kuli utworzoney obrotem połkola AFBN; dotykałby ſię iey także w okręgu, ktòrego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mòwi ſię, iż ieſt na kuli opiſanym. Nazywa ſię on także i Walcem Archimedeſa, od nazwiſka tego Matematyka, który pierwſzy znalazł ró-

wność

wność powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i stosunek ich bryłowatości.

149. Powierzchnia iedney z dwóch podstaw tego Walca, równa się Prostokątowi z okręgu tey podstawy, i z połowy iey promienia; a zatym powierzchnia obydwòch razem tych podstaw, równa się Prostokątowi z okręgu iedney podstawy, i z iey promienia. Aże powierzchnia krzywa Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu podstawy iego, i z średnicy teyże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu iego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego; a zatym powierzchnia krzywa tego Walca iest $\frac{2}{3}$ powierzchni iego całey; a przeto i powierzchnia kuli iest też $\frac{2}{3}$ powierzchni całey Walca na niey opisanego.

150. *Uwaga.* To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystosować do niektórych przykładów liczebnych podobnych następuiącemu.

Przykł: Jakaż iest wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachuiąc na stopień, mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, iedno proſtopadłe do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych kół, nap: co dzieſięć, albo co pięć ſtopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaſzczyzny równoodległe od koła drugiego. Trzeba znaleść wielkość powierzchni zawartych między dwoma naybliżſzemi od ſiebie podſtawami.

Wſzczegulności zaś, ieżeli uczniowie maią wiadomość początkową Geografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których iedno odległe ieſt od *Równika* (æquator), na 23° ½, a drugie od *Biegónu* (polus) także na 23° ½.

Tob. VI. Fig. 2 Niech będzie CF promieniem iednego koła wielkiego; niech NBF. wyraża czwartą część drugiego koła do niego proſtopadłego; niech BQ,bq, będą przecięciami tego koła proſtopadłego i dwóch płaſzczyzn równoodległych od koła, pierwſzego.

Powierzchnia krzywa połkuli, tak ſię ma do powierzchni części zawartey między płaſzczyznami CF i BQ, iak ſię ma promień kuli, do linii CQ, która ieſt

wſtawą

wſtawą łuku BF. Podobnie i powierzchnia krzywa połkuli, tak ſię ma do powierzchni części zawartey między płaſzczyznami: CF, i bq, iak wſtawa cała, czyli promień do wſtawy łuku bF, to ieſt do linii Cq. Można więc wyrachować te części powierzchni półkuli, a zatym i ich różnicę, to ieſt: część powierzchni zawartey między płaſzyznami: BQ, i *bq*.

151. *Twierdz.* 2. Bryłowatość kuli równa ſię $\frac{2}{3}$ bryłowatości Walca na tey kuli opiſanego.

Niech będzie ACBMA czwarta część koła, tworząca Półkulę obrotem ſwoim około promienia CB. Niech będzie CABD kwadrat opiſany na tey czwartey części koła. Ten kwadrat obracaiąc ſię około CB, utworzy Walec opiſany na połkuli, który będzie połową Walca opiſanego na całey kuli. Trzeba dowieść, iż Połkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC równa ſię $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem kwadratu ACBD. *Tab. VI. Fig. 3.*

Poprowadźmy przekątną CD; Tròykąt BCD utworzy Oſtrokrąg, którego

O pod-

podſtawa wykreślona będzie promieniem BD, a za wyſokość tego Oſtrokręgu będzie BC; to ieſt będzie ten Oſtrokrąg równey z Walcem podſtawy, i wyſokości.

Od dwóch ktòrychkolwiek punktów nap: P, i *p* Oſi CB wyciągniniymy proſtopadłe do niey liniie: PQ, pq; te przetną okrąg w M, i *m*, a liniią CD w L, i *l*; nakreślmy nadto, liniie: MN, *mn*, LO, *lo*, równoodiegłe od oſi. Kwadrat promienia CM, ròwna ſię ſummie kwadratòw z PM, i CP; aże liniia PQ równa ieſt promieniowi, (tak iako BD, CA i CB ſą równe) i CP równa PL; więc kwadrat z PQ, ròwna ſię ſummie kwadratòw z PM, i z PL.

Ze zaś Walce utworżone obrotem Proſtokątów Pq, PN, PO, maiących iednakie wyſokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy, albo iak kwadraty promieniòw tychże podſtaw; więc pierwſzy z tych Walcow będzie równy ſummie dwoch innych. Podobnym ſpoſobem okazać można, że Walec Pq równa ſię ſummie Walców utworzonych obrotem Proſtokątów Pm, i Pl.

Tako-

Takowe dowodzenie ma mieyſce chociaż nie od punktów P, i p, ale od ktòrychkolwiek innych będą wywiedzione proſtopadłe do oſi CB; a zatym podzieliwſzy oś, na iakąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwſzy proſtopadłe przecinaiące tak okrąg iako i liniią CD; Summa wſzyſtkich Walców ſkładaiących Walec ADB, równać ſię będzie ſummie wſzyſtkich Walcow wpiſanych w Półkulę, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców opiſanych na Oſtrokręgu, albo ſummie wſzyſtkich Walców opiſanych na Półkuli, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców w Oſtrokrąg wpiſanych. Aże ſumma wſzyſtkich Walcow wpiſanych lub opiſanych na Półkuli, może ſię mnieyſzą ilością różnić od teyże Pòłkuli, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a wtedy i ſumma wſzyſtkich Walcòw wpiſanych, lub opiſanych Oſtrokręgowi, ròżnić ſię też od tego Oſtrokręgu będzie mnieyſzą ilością, niż ieſt ta ilość dana.

Więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania;) Walec utworzony obrotem kwadratu CABD, ròwna ſię ſummie z Pòłkuli utworzoney obrotem czwartey części koła, i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tróykąta BCD.

Aże Oſtrokrąg utworzony obrotem Tróykąta BC, ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Połkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC, ieſt $\frac{2}{3}$ Walca.

A zatym kula, ktòraby utworzyła ſię obrotem Półkola, byłaby też $\frac{2}{3}$ Walca opiſanego na tey kuli, a utworzonego obrotem Proſtokąta opiſanego na Półkolu tworzącym kulę.

152. *Wnioſek* 1. Stoſunek bryłowatości kuli do bryłowatości Walca opiſanego, ten ſam ieſt co, i ſtoſunek powierzchni kuli, do powierzchni całey Walca opiſanego; (149).

153. *Wnioſek* 2. Bryłowatość kuli, rówwna ſię bryłowatości Oſtrokręgu, któryby miał za podſtawę, koło równe powierzchni kuli, a za wyſokość, promień teyże kuli. Jakoż ten Oſtrokrąg maiąc podſtawę cztery razy większą od podſtawy Walca na kuli opiſanego, byłby cztery razy więkſzy od Oſtrokręgu innego równey z nim wyſokości, a maiącego podſtawę rówwną z Walcem. Aże ten drugi Oſtrokrąg, gdyby miał połowę tylko wyſokości Walca, byłby połową Oſtrokręgu maiącego rówwną z Walcem

wyſo-

wyſokość i podſtawę, a zatym byłby połową tego Oſtrokręgu, który ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Oſtrokrąg maiący równą z Walcem podſtawę, a wyſokość równą promieniowi kuli, ieſt $\frac{1}{6}$ tego Walca; a zatym Oſtrokrąg maiący za wyſokość promień kuli, a podſtawę cztery razy więkſzą od podſtawy Walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ Walca. Że zaś i kula ieſt $\frac{2}{3}$ tegoż Walca, więc kula równa ſię temu Oſtrokręgowi.

Można to ſamo ieſzcze i w ten ſpoſob okazać:

Niech będzie iakikolwiek *Wielościan* (Polyedrum) ktòrego wſzyſtkie ściany dotykaią ſię kuli: uważaiąc każdą z tych ścian iak podſtawę Oſtrogranu maiącego ſwoy wierzchołek w środku Wielościanu; bryłowatość tego Wielościanu, równać ſię będzie bryłowatości iednego takiego Oſtrogranu, ktòryby miał za wyſokość promień kuli, a za podſtawę ſummę podſtaw, Oſtrogranów, na które podzielony był ten Wielościan; to ieſt powierzchnią całą tego Wielościanu.

To podanie zawſze ieſt prawdziwe, iakażkolwiek będzie liczba ścian tego Wielo-

Wielościanu więc (podług tego, co się mowiło o sposobie wyczerpania,) możnaby łatwo dowieść, że też i do kuli wszczegulności przystosowane to podanie, iest prawdziwym, a zatym że kula, rowna się Ostrokręgowi, ktoryby miał za wysokość, iey promień, a za podstawę, całą iey powierzchnią.

154. *Wniosek* 3. Wycinek kuli utworzoney obrotem wycinka kołowego BCM, rowny iest Ostrokręgowi maiącemu za wysokość, promień tey kuli, a za podstawę, koło, rowne powierzchni kulistey, utworzoney obrotem łuku BM; to iest koło, ktòrego promieniem byłaby cięciwa BM; a zatym bryłowatość tego wycinka, tak się ma do bryłowatości kuli, iak powierzchnia tego wycinka, do powierzchni kuli; albo iak wysokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wniosek* 4. Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonego obrotem wycinka koła BCM, iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD. Jakoż powierzchnia tego wycinka, tak się ma do powierzchni kuli, iak BP, do średnicy kuli albo iak Walec utworzony obrotem Prostokąta BPQD do Walca opisanego

go

go na kuli. Aże kula ieſt $\frac{2}{3}$ Walca na niey opiſanego, więc i wycinek kuli, utworzony obrotem wycinka koła BCM, ieſt też $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta BPQD.

156. *Wnioſek* 5. Podobnie, i część kuli utworzona obrotem wycinka ACM ieſt $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta CAQP. Aże część kuli (którą to część nazwać można *klocem kuliſtym* (Truncus ſphæricus) utworzony obrotem części kołowey ACPM, ieſt ſummą z wycinka kuliſtego utworzonego obrotem wycinka kołowego ACM. i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tròykąta CPM; więc bryłowatość tego kloca kuliſtego, równa ſię ſummie z $\frac{2}{3}$ Walca teyże z nim wyſokości, któryby miał za podſtawę, koło wielkie kuli, i z $\frac{1}{3}$ Walca iednakiey także wyſokości, a którego podſtawa byłaby równa drugiemu kołu kloc ten kończącemu; a zatym bryłowatość tego kloca tak ſię ma do bryłowatości Walca utworzonego obrotem Proſtokąta CAQP, iak $\frac{2}{3}$ $CA^2 + \frac{1}{3}$ MP^2 do CA^2.

157. *Wnioſek* 6. Aby znaleść odcinek kuli utworzoney obrotem odcinka kołowego BMP; uważaymy ſobie ten odcinek

nek kulisty, iak różnicę między Półkulą utworzoną obrotem czwartey części kołowey ABC, a klocem kulistym utworzonym przez obrot odcinka CAMP; albo też iak rożnicę wycinka kulistego utworzonego obrotem wycinka BDM; od Ostrokręgu utworzonego obrotem Tròykąta CPM; albo nakoniec, iak różnicę Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD, od Ostrokręgu ściętego, utworzonego obrotem Czworokąta BDLP.

ROZDZIAŁ X.

O Bryłach podobnych.

158. DWie Bryły samemi tylko płaszczystemi powierzchniami zakończone, i ktòrych wszystkie kąty bryłowe odpowiadaiące sobie mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadające są podobne; te mowię dwie Bryły nie rożnią się chyba samą tylko wielkością, i iedna wzorem iest drugiey. Tak nap: dwa Sześciany, z ktòrych ieden ma bok długi na poł stopy, a drugi, na cal ieden, rożnią się samą tylko wielkością. Takie Bryły nazywaią się podobnemi.

Przy-

Przykłady. Dwa Równoległościany proftokątne fą podobne, gdy ich podftawy i ściany fą podobne iedne względem drugich,

Dwa Graniaftofłupy profte, fą podobne, gdy podobne fą ich podftawy, i gdy wyfokość ich proporcyonalna iednemu z boków, tychże podftaw.

Dwa Oftrograny, maiące kąt bryławaty fpolny w wierzchołku podobne będą, gdy podftawy ich fą równoodległe.

159. *Uwaga.* Gdy dwie Figury proftokreślne, fą podobne; wziąwfzy punkt iakikolwiek w iedney z tych figur, i poprowadziwfzy od tego punktu liniie do wfzyftkich wierzchołków tey figury; można będzie znaleść i w drugiey figurze punkt podobnie pierwfzemu położony; od którego ciągnąc liniie do każdego tey figury wierzchołka, podzielemy ią na Tróykąty podobne względem Tróykątów, na które podzielona była pierwfza figura. Podobnie też:

160. *Twierdz:* 1. Wziąwfzy w Bryle zakończoney powierzchniami płafzczyftemi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tylu Oftrogranów, ile ta Bryła ma fcian, biorąc też fciany za podftawy; można znaleść i w drugiey Bryle podobney, punkt podobnie pierwfzemu położony, który wziąwfzy także za wierzchołek, tyluż

tyluż co i w pierwſzey Bryle, Oſtrogra, nów, wſzyſtkie te Oſtroſtrograny będą podobne względem Oſtrogranów pierwſzey Bryły.

Przykład. Weźmy środek Sześcianu za wierzchołek ſześciu Oſtrogranów, maiących za podſtawy, ściany tego Sześcianu; gdy w innym iakimkolwiek Sześcianie, weźmiemy także środek za wierzchołek ſześciu Oſtogranów maiących za podſtawy, ściany tego drugiego Sześcianu; te drugie Oſtrograny, będą podobne względem pierwſzych.

Toż mówić i o innych Bryłach foremnych.

Natym podaniu zaſadza ſię cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłuſzczeniem iey nieco zabawić ſię.

Wybrawſzy iakikolwiek punkt w Bryle za wierzchołek Oſtrogranów maiących ściany tey Bryły, za podſtawy, i na te Oſtrograny, Bryłę podzieliwſzy, ſpuśćmy od tego punktu proſtopadłą do iedney z ścian tey Bryły; a na ścianie odpowiadaiącey w drugiey Bryle, weźmy punkt podobnie na tey ścianie położony, iaki ſpodek proſtopadłey ſpuſzczoney na ścianę pierwſzey

Bryły

Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiey Bryły położonego, wyprowadźmy proſtopadłą do tey ściany, tak wyſoką aby ſtoſunek iey do pierwſzey proſtopadłey równał ſię ſtoſunkowi dwòch krawędzi, odpowiadaiących ſobie w obydwóch Bryłach. Wierzch tey drugiey proſtopadłey weźmy za wierzhołek wſzyſtkich Oſtrogranòw, na ktòre, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Oſtrograny tey drugiey bryły, będą podobne względem Oſtrogranòw, na ktòre podzielona pierwſza Bryła.

Dowodz: Odległości dwòch punktów ſłużących za wierzchołki Oſtrogranów, od wierzchołków odpowiadaiących ſobie w ścianach, do których proſtopadłe ſą ciągnione, te mowię odległości, ſą przeciwproſtkątnemi Tróykątów proſtokątnych podobnych, maiących za boki te proſtopadłe, i odległości ich ſpodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wſzyſtkie ściany tych dwóch Oſtrogranów, odpowiadaiące ſobie boki, maią proporcyonalne, to ieſt maią ie w ſtoſunku dwòch krawędzi odpowadaiących ſobie w dwóch Bryłach; a zatym wſzyſtkie te ściany, ſą podobne, i wſzyſtkie ich kąty ſą równe iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które ſię z nich ſkładaią, mogą przyſtać do ſiebie; ſą więc te

dwa

dwa Oſtrograny podobne. Pochyłości też ścian Oſtrogranów do płaſzczyzn podſtaw ſą równe iedne względem drugich; aże także równe ſą pochyłości, tych podſtaw do płaſzczyzn ścian tych odpowiadaiących ſobie w Bryłach, które ściany ſpolną krawędź maią z podſtawami tych Oſtrogranów, więc i ściany odpowiadaiące ſobie w tych dwoch Oſtrogranach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadaiących ſobie w dwoch Bryłach, a które maią ſpolną krawędź z pierwſzemi dwiema ścianami; to ieſt z podſtawami dwóch tych Oſtrogranów.

Na ścianach dwóch, odpowiadaiących ſobie w tych dwóch pierwſzych Oſtrogranach, ſpuśćmy od ich wierzchołków proſtopadłe do podſtaw tychże dwóch ścian; a od ſpodków tych proſtopadłych poprowadźmy na ścianach odpowiadaiących ſobie w dwóch Bryłach, inne dwie proſtopadłe do tychże dwóch podſtaw, ścian Oſtrogranów. Oprócz tego, na płaſzczyznie przechodzącey przez dwie w obydwóch bryłach ciągnione proſtopadłe, ſpuśćmy do drugich dwóch proſtopadłych, na płaſzczyznach ścian odpowiadaiących ſobie, w Bryłach, od tychże co i pierwſze wierzchołków, trzecie dwie proſtopadłe; te oſtatnie proſtopadłe, będą proſtopadłemi do płaſzczyzn

dwoch

dwòch tych ścian odpowiadaiących ſobie, na których ciągnione były dwie drugie proſtopadłe; Tròykąty zawarte trzema temi proſtopadłemi, tak w iedney, iak i w drugiey Bryle, będą ròwnokątne, a zatym i podobne. Aże pierwſze dwie proſtopadłe ciągnione na płaſczyznach ścian, dwóch pierwſzych Oſtrogranòw, maią ſię do ſiebie, iak krawędzie odpowiadaiące ſobie w dwòch Bryłach; więc też i odległości wierzchołkòw, tych dwòch Oſtrogranòw od drugich dwóch ścian także ſobie odpowiadaiących, w tych Bryłach, będą w tymże ſamym ſtoſunku; i odległości ſpodków ich, od dwóch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadaiących ſobie, w tymże też ſtoſunku będą.

Spodki proſtopadłych ſpuſzczonych na dwie ściany odpowiadaiące ſobie w pierwſzych dwóch Oſtrogranach, były podobnie położone na dwòch Brył krawędziach odpowiadaiących ſobie, a zatym odległości tych ſpodkòw od końców odpowiadaiących ſobie, tych krawędzi, ſą do ſiebie w tymże ſamym ſtoſunku; a zatym odległości ſpodków liniy proſtopadłych ſpuſzczonych do płaſzczyzn drugich dwóch ścian Brył, od końcòw tychże dwóch krawędzi, będą w tym ſamym ſtoſunku. Więc na tych dwòch ścianach, ſpodki proſtopadłych podobnie

ſą

ſą położone. Ze zaś i wielkości tych proſtopadłych ſą proporcyonalne krawędziom tych dwóch Brył; więc wierzchołki pierwſzych dwóch Oſtrogranów, ſą też podobnie położone względem dwòch ścian drugich, odpowiadaiących ſobie w Bryłach; a zatym i drugie dwa Oſtrograny maiące ſpolny wierzchołek, a te dwie ściany Brył za podſtawy, będą do ſiebie podobne.

Toż mówić i o innych Oſtrogranach odpowiadaiących ſobie, z ktòrych ſię te dwie Bryły ſkładaią. (i)

161. *Twierd:* 2. Powierzchnie Brył podobnych, zakończonych ſamemi tylko płaſzczyſtemi powierzchniami, maią ſię

(i) *To Twierdzenie, ieſt bardziey długie niż trudne, i łatwo poiąć ie można, maiąc Figurę przed oczema z drewna, lub z papieru zrobioną. Jużby też nawet po tak wielu Geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawieni bydź Uczniowie, aby w myśli ſamey umieli ſobie wyſtawić Figurę pomagaiącą do zrozumienia Twierdzenia podanego. a zdatnieyſzą do obiaśnienia iego, niżby była Figura odryſowana w perſpektywie, i przed oczy im ſtawiona.*

ſię do ſiebie, iak kwadraty boków ich odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku dwumnożnym tychże boków.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany dwòch Brył podobnych, po dwie brane ſą ſobie podobne; i tak brane, w iednakowym do ſiebie ſą ſtoſunku, to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym, dwòch krawędzi odpowiadaiących ſobie; więc i ſumma wſzyſtkich ścian kończących iednę Bryłę, będzie do ſummy wſzyſtkich ścian kończących drugą Bryłę, w tymże ſamym ſtoſunku.

162. *Twierdz:* 3. Bryłowatości dwòch Brył podobnych, ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym dwóch ich krawędzi odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku tròymnożnym tychże dwóch krawędzi.

1. Widzieliśmy iuż, że ſtoſunek iednego Sześcianu do drugiego, ten ſam ieſt, co i ſtoſunek boku pierwſzego Sześcianu, do czwartey linii ciągło proporcyonalney; która ſię znayduie, ſzukaiąc nayprzod trzeciey ciągło proporcyonalney, do boku Sześcianu pierwſzego, i do boku Sześcianu drugiego; a potym do tychże dwòch boków, i do trzeciey propor-

porcyonalney znalezioney, ſzukaiąc czwartey.

Gdyby tedy bok drugiego Sześcianu był dwa razy nap: większy od boku Sześcianu pierwſzego, ta czwarta ciągło proporcyonalna, byłaby ośm razy większa od boku Sześcianu pierwſzego, a zatym i Sześcian drugi byłby ośm razy większy od Sześcianu pierwſzego.

2. Niech będą dwa Równoległościany proſtokątne podobne.

Gdy krawędź iedna, iednego z tych Równoległościanów, ieſt nap: dwa razy większa, od krawędzi iedney drugiego Równoległościanu; wſzyſtkie też inne krawędzie pierwſzego Równoległościanu, będą dwa razy większe od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podſtawy pierwſzego Równoległościanu, będzie cztery razy większa, niż powierzchnia podſtawy drugiego. Aże też i wyſokość pierwſzego, dwa razy ieſt większa od wyſokości drugiego; więc bryłowatość pierwſzego ieſt ośm razy większa od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przyſtoſować można do wſzyſtkich innych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogul-

W ogulności zaś mowiąc: niech będą trzy krawędzie: A,B,C, iednego Równoległościanu proſtokątnego; a zaś: *a*,*b*,*c*, krawędzie drugiego Równoległościanu, pierwſzemu podobnego; będą te trzy ſtoſunki równe; A : a = B : b = C : c. Liniiom A,i *a*, znaydźmy dwie liniieL,i M, ciągło proporcyonalne; tak aby było A: a = a : L = L : M,

Będzie pierwſzy Rownoległościan do drugiego, iak A do M.

Jakoż uważaiąc liniie A i *a*, B, i *b*, iak boki podſtaw, tych dwóch Równoległościanów, zamieńmy Proſtokąt z linii a, i b, na inny, któryby miał za bok ieden, liniią B, a za bok drugi, tę liniią, która wypadnie z proporcyi B : b = a : *x*. Ze zaś ſtoſunek linii B do b, wzięty ieſt za równy ſtoſunkowi linii A do *a*, więc też będzie A : a = a : x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey ſzukamy, będzie w ſamey rzeczy trzecią proporcyonalną do A, i *a*. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną ; L. Będzie podſtawa drugiego Równoległościanu, równa Proſtokątowi z B przez L; i ten drugi Równoległościan, będzie równy Rownoległościanowi, któryby miał trzy linie B, *c*, L, za krawędzie ; a zatym ſtoſunek iego do

pierwſzego Równoległościanu, będzie ten ſam, co i ſtoſunek Proſtokąta z liniy c, i L, do Proſtokąta z liniy A, i C.

Zamieńmy Proſtokąt z liniy *c* i L, na inny, któryby miał za bok ieden liniią C, a za bok drugi liniią, która wypadnie z proporcyi C : *c* = L : x. Ze zaś ſtoſunek linii C do *c*. wzięty ieſt za równy ſtoſunkowi A do *a*, a ſtoſunek A do *a*, zrobiliśmy równy ſtoſunkowi *a*, do L, więc też będzie *a* : L = L : = x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey ſzukamy będzie w ſamey rzeczy trzecią proporcyonalną do *a*, i L. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną : M; Proſtokąty : C × ,M i *c* × L. będą równe, Ażeſię do wiodło iż pierwſzy Równoległościan ieſt do drugiego w ſtoſunku Proſtokąta A × C do Proſtokąta c × L; więc też ten pierwſzy Rownoległościan będzie do drugiego w ſtoſunku Proſtokąta A × C do Proſtokąta C × M, to ieſt w ſtoſunku A do M.

Ze zaś ieſt A : a = a : L = L : M; więc ſtoſunek pierwſzego Równoległościanu do drugiego, równa ſię ſtoſunkowi linii pierwſzey do czwartey, ciągło proporcyonalney; która to pierwſza liniia

ſłużą-

ſłużąca za pierwſzy wyraz proporcyi, powinna być krawędziem iednego z tych Równoległościanów, drugim zaś teyże proporcyi wyrazem, ma być krawędź drugiego Równoległościanu, pierwſzemu odpowiadaiący; tak iak ieſt nap: krawędź A, i *a*.

Ale że też i dwa Sześciany maiące krawędzie A, i *a*, w tymże ſamym byłyby ſtoſunku, więc dwa Równoległościany podobne, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym ich krawędzi.

163. *Twierdz: przybrane.* Wyſokości Graniaſtoſłupów podobnych, lub Oſtrogranów podobnych, tak ſię maią do ſiebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące ſobie.

Dowodz: Dwóch ścian odpowiadaiących ſobie w dwóch Graniaſtoſłupach podobnych, pochyłości do podſtaw ſą równe; tychże ścian wyſokości, tak ſię maią do ſiebie, iak boki, ſłużące im za podſtawy. Wyſokości tych Graniaſtoſłupów, równe ſą proſtopadłym ſpuſzczonym na ich podſtawy od punktów którychkolwiek na podſtawach przeciwnych, (nap: od punktów na bokach odpowiadaiąch ſobie w tychże pod-

ſtawach; a zatym te wyſokości Graniaſtoſłupów, będą ſłużyć za iedno ramie kąta proſtego, w dwóch Tróykątach podobnych, które za przeciwproſtokątne, maią wyſokości dwóch ścian odpowiadaiących ſobie. Będą zatym te wyſokości dwóch Graniaſtoſłupów, tak ſię mieć do ſiebie, iak wyſokości dwóch ich ścian odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak krawędzie dwóch tychże Graniaſtoſłupów, odpowiadaiące ſobie. To ſamo rozumowanie przyſtoſować można i do Oſtrogranów,

3. Niech będą dwa iakiekolwiek Graniaſtoſłupy podobne, i te także ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym, ich krawędzi odpowiadaiących ſobie.

Rozumowanie Arytmetyczne, ktòreby mogło ſłużyć za wſtęp do ogulnego dowodzenia, to ſamo ieſt, co i poprzedzadzaiące.

Wyſtawuiąc ſobie podſtawy tych dwóch Graniaſtoſłupów, zamienione na dwa kwadraty równe im co do powierzchni; ponieważ powierzchnie tych dwóch podſtaw, maią ſię do ſiebie, iak kwadraty bokòw ich, odpowiadaiących ſobie; więc

też i powierzchnie kwadratów równych tym podstawom; mieć się do siebie będą, iak kwadraty boków odpowiadaiących sobie, w tychże podstawach; a zatym i stosunek boków, tych dwóch kwadratów, równy będzie stosunkowi boków odpowiadaiących sobie w podstawach, dwóch Graniastosłupów. Aże ten ostatni stosunek, równa się stosunkowi wysokości dwóch Graniastosłupów; więc Rownoległościany maiące za podstawy kwadraty, równe podstawom Graniastosłupów, i wysokości równe wysokościom Graniastosłupów, byłyby do siebie podobne; a zatym te dwa Równoległościany, takby się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi, albo iak Sześciany krawędzi odpowiadaiących sobie w Graniastosłupach. Że zaś te Równoległościany, byłyby równe względem Graniastosłupów, więc też i dwa Graniastosłupy podobne, maią się do siebie, iak Sześciany krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

4. Niech będą dwa iakiekolwiek Ostrograny podobne, stosunek ich równa się stosunkowi Sześcianów krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

Dwa

Dwa Graniaſtoſłupy nap: proſte, których podſtawy i wyſokości byłyby równe względem podſtawy i wyſokości, tych Oſtrogranów; te mówię Graniaſtoſłupy miałyby wyſokości proporcyonalne bokom podſtaw ſwoich; byłyby więc podobne; a zatym tak by ſię do ſiebie miały, iak Sześciany ich krawędzi. Aże byłyby trzy razy większe względem tych dwóch Oſtrogranów, więc i te Oſtrograny ſą do ſiebie w ſtoſunku Sześciennym ich krawędzi:

5. Wſzyſtkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaſkiemi, maią ſię do ſiebie iak Sześciany, ich krawędzi.

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Oſtrograny, z których każdy w ſzczegulności należący do iedney Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey Bryły. Te Oſtrograny iedne względem drugich poiedynczo brane, mieć ſię do ſiebie będą w ſtoſunku ſześciennym ich krawędzi, odpowiadaiących ſobie; więc i ſumma wſzyſtkich Oſtrogranów, z których ſię ſkłada iedna Bryła, będzie do ſummy wſzyſtkich Oſtrogranów, z których ſię ſkłada druga

ga Bryła, w tymże ſamym ſtoſunku, to ieſt w ſtoſunku ſześciennym, ich krawędzi, odpowiadaiących ſobie.

164. *Defin:* Walce proſte podobne do ſiebie ſą te, których ſtoſunek wyſokości, równa ſię ſtoſunkowi promieni, ich podſtaw; przecięcia zatym tych Walców przez oſi przechodzące, ſą podobne, a ztąd podobne ſą i Proſtokąty tworzące obrotem ſwoim te Walce.

Co zaś do Walców pochyłych, a do ſiebie podobnych; oprocz tego, że wyſokości ich mieć ſię powinny do ſiebie, iak promienie ich podſtaw, przecięcia też ich od płaſzczyzny przechodzącey przez ich oſi proſtopadłe do podſtawy, powinny być do ſiebie podobne, to ieſt ich oſi powinny ſię mieć do ſiebie, iak promienie ich podſtaw:

165. *Twierdz.* 4. Powierzchnie Walców proſtych podobnych, maią ſię do ſiebie, iak kwadraty ich *Wymiarów* (Dimenſio) odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak kwadraty promieni, ich podſtaw, albo iak kwadraty ich wyſokości.

Powierzchnia każdego z tych Walców równa ſię Proſtokątowi z okręgu podſtawy

wy iego, i z ſummy wyſokości iego, i promienia podſtawy; więc powierzchnie te, tak ſię mieć do ſiebie będą, iak Proſtokąty z promieni ich podſtaw, i z ſummy tychże promieni i wyſokości Walców. Aże Promienie podſtaw, ſą do ſiebie (dla podobieńſtwa Walców) iak ich wyſokości, więc i ſumma z tych promieni ieſt do ſummy z tych wyſokości, w tym ſtoſunku, w którym ſą te promienie. Proſtokąty więc, w których ſtoſunku maią ſię do ſiebie powierzchnie te Walców, ſą podobne, a przeto tak ſię będą do ſiebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadaiących ſobie, nap: iak kwadraty promieni ich podſtaw. Będą więc do ſiebie i powierzchnie Walców w tymże ſamym ſtoſunku; to ieſt, iak kwadraty promieni, ich podſtaw.

Toż mówić i o powierzchniach krzywych w Walcach; to ieſt, o takich, w których ſię nie zamykaią podſtawy.

166. *Twierdz:* 5. Bryłowatości Walców podobnych, tak ſię maią do ſiebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących ſobie; to ieſt, ſą do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym tychże wymiarów, nap: w ſtoſunku troymnożnym promieni, ich podſtaw.

Dowodz:

Dowodz: Opiſzmy na podſtawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty foremne, podobne; niech te Wielokąty będą podſtawami Graniaſtosłupów, teyże z Walcami wyſokości. Te Graniaſtosłupy będą podobne, a zatym będą ſię miały do ſiebie w ſtoſunku tròymnożnym, nap: promieni ich podſtaw.

Walce tak ſię do ſiebie maią, iak Graniaſtoſłupy na nich opiſane. Jakoż każdy Walec ieſt do Graniaſtosłupa na nim opiſanego, w ſtoſunku podſtawy tego Walca do podſtawy Graniaſtoſłupa. Aże podobne ſą dwa Wielokąty na podſtawach Walców opiſane, więc tenże ſam ſtoſunek będzie każdego Walca do Graniaſtosłupa na nim opiſanego; a zatym tak ſię mieć będzie ieden Walec, do Graniaſtoſłupa na nim opiſanego, iak i Walec drugi do Graniaſtosłupa na nim także opiſanego, tak więc pierwſzy Walec będzie ſię miał do drugiego, iak i pierwſzy Graniaſtosłup do drugiego.

Aże ſtoſunek tych Graniaſtosłupów równa ſię ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni podſtaw Walców, na których ſą te Graniaſtosłupy opiſane; więc i ſtoſunek

ſunek tych Walców równać ſię także będzie ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni tychże podſtaw.

167. Można obiaśnić przykładami liczebnemi to Twierdzenie; ma zaś być nayprzod przyſtoſowane do ſamych Walców proſtych, z kąd łatwo wnieść będzie można, że i w ukośnych Walcach, ten ſam ſtoſunek ma mieyſce; ponieważ Walce ukośne, równey podſtawy i wyſokości z Walcami proſtemi, byłyby im równe, a zatym byłyby też do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni podſtaw ſwoich.

168. *Defin.* Oſtrokręgi proſte nazywaią ſię *podobnemi*, gdy tak ſię maią do ſiebie ich wyſokości, iak i promienie ich podſtaw. Przecięcia przechodzące przez oś tych Oſtrokręgów ſą podobne, a zatym podobne ſą Tróykąty, tworzące obrotem ſwoim te Oſtrokręgi.

Co zaś do Oſtrokręgów ukośnych: tych nie tylko wyſokości tak ſię mieć do ſiebie powinny, iak promienie ich podſtaw, ale nadto i oſi ich w tymże ſamym do ſiebie ſą ſtoſunku.

169. *Twierdz*: 6. Powierzchnie całe Ostrokręgów prostych, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stosunku dwumnożnym boków tychże Ostrokręgów.

Dowodzenie tego, może być podobne do dowodzenia Twierdzenia 4. względem stosunku powierzchni Walców podobnych.

Może też być i w sposob następuiący, który także służyćby mogł równie i do Walców:

W iednym którymkolwiek Ostrokręgu, powierzchnia krzywa, tak się ma do powierzchni podstawy, iak bok Ostrokręgu, do premienia tey podstawy. Aże i w drugim Ostrokręgu podobnym, pierwszemu tenże sam stosunek ma mieysce; więc powierzchnia krzywa iednego Ostrokręgu, tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak powierzchnia krzywa drugiego Ostrekręgu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywey i z powierzchni podstawy iednego Ostrokręgu, to iest cała iego powierzchnia tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchnia drugiego Ostrokręgu, do powierzchni iego

iego podſtawy; a zatym cała powierzchnia pierwſzego Oſtrokręgu, tak ſię ma do całey powierzchni drugiego, iak powierzchnia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, do powierzchni drugiego; albo iak kwadrat promienia pierwſzey podſtawy, do kwadratu promienia drugiey.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywe Oſtrokręgów podobnych, ſą w ſtoſunku dwumnożnym promieni podſtaw, tych Oſtrogręgów lub ich boków odpowiadaiących ſobie.

170. *Twierdz,* 7. Bryłowatości Oſtrokręgów podobnych, maią ſię do ſiebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak Sześciany promieni ich podſtaw, albo iak Sześciany ich boków, i t. d.

Twierdzenie to podobnie ſię dowodzi, iak i poprzedzaiące, względem bryłowatości Walców; kładąc zamiaſt Graniaſtoſłupów na Walcach opiſanych, Oſtrograny opiſane na Oſtrokręgach.

171. *Uwaga.* Wſzyſtko to, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku bryłowatości

Równo-

Równoległościanów, Graniastosłupow, Ostrogranów, i Ostrokręgów podobnych, na to wypada, że:

W ogulności mówiąc, te Bryły są w stosunku złożonym z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości.

Ze zaś, gdy te Bryły są podobne, stosunek ich podstaw, iest dwumnożnym stosunku ich wysokości, więc stosunek złożony z stosunku ich podstaw, i z stosunku ich wysokości, składa się z stosunku dwumnożnego, i z stosunku poiedyńczego ich wysokości; będzie tedy taki stosunek tróymnożnym stosunku ich wysokości. A że stosunek ich wysokości równa się stosunkowi ich boków którychkolwiek odpowiadaiących sobie, więc stosunek tych Brył, gdy do siebie są podobne, iest też stosunkiem tróymnożnym boków ich którychkolwiek odpowiadaiących sobie.

172. *Twierdz.* 8. Powierzchnie kul, są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, to iest: iak kwadraty ich promieni. Bryłowatości zaś kul, są do siebie w stosunku tróymnożnym ich promieni, to iest, iak Sześciany tychże promieni.

Dowodz.

Dowodz. Powierzchnie kul, ſą cztery razy większe, niżeli powierzchnie ich kół wielkich; a zatym, tak ſię do ſiebie maią, iak powiezchnie tychże kół, to ieſt: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowatości kul, ſą $\frac{2}{3}$ względem Walców na nich opiſanych; więc tak ſię maią do ſiebie, iak bryłowatości tych Walców, to ieſt iak Sześciany ich promieni.

173. *Uwaga.* Widzieliśmy w ſzczegulności, iż powierzchnia kuli, ieſt do powierzchni kwadratu iey średnicy, w ſtoſunku okręgu koła do iego średnicy, i ten ſtoſunek ieſt zawſze iednakowy. Widzieliśmy też, że bryłowatość kuli, ieſt do bryłowatości Sześcianu iey średnicy, iak okrąg koła. do średnicy iego, 6 razy wziętey; który także ſtoſunek nigdy ſię nieodmienia.

Kule więc zachowuią własności Brył podobnych, tak w ſtoſunku ich powierzchni, iako i w ſtoſunku ich bryłowatości. Jakoż, ſą one w ſamey rzeczy Bryłami podobnemi; środek iedney kuli podobnie ieſt położony, iak i środek inney iakieykolwiek kuli; tak iedna iak i druga, tworzy ſię obrotem połkola, a te połkola ſą do ſiebie podobne.

Można-

Możnaby więc (z niewielką odmianą) to im przyſtoſować, co ſię powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaſkiemi, względem punktów podobnie położonych w tychże Bryłach.

174. *Defin:* Wycinki podobne kul, ſą te, których kąty w środku, ſą podobne, albo które obrotem podobnych wycinków kół tworzą ſię.

Odcinki kul, podobne, ſą te, których promienie podſtaw, tak ſię do ſiebie maią, iak ich wyſokości, albo iak promienie kul, do których należą; albo na koniec ſą te, które ſię tworzą podobnych poł odcinków koł obrotem.

175. *Twierdz:* 9. Powierzchnie kuliſte, i powierzchnie całe, tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz: Niech będą: ACB. acb, dwa wycinki, kół podobne, które obrotem ſwoim, około promieni: AC, ac, tworzą podobne kul wycinki. *Tab. VI Fig. 4.*

Nayprzod

Nayprzod Powierzchnie kulifte utworzone przez łuki: AB: ab, równać fię będą powierzchniom kół maiących za promienie, liniie: AB, ab; więc tak fię mieć będą do fiebie, iak kwadraty tych liniy: AB, ab, albo iak kwadraty promieni: AC, ac.

Powtore. Powierzchnie Oftrokręgowe utworzone obrotem promieni: CB, bc, maią fię też do fiebie, iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca; Więc i powierzchnie całe wycinków podobnych tak fię do fiebie maią, iak kwadraty promieni CA, ca.

Koła wykreślone promieniami BD, bd, i fłużące za podftawy odcinkom kul, utworzonym przez obrot połodcinków kół; ABD, abd, fą także do fiebie, iak kwadraty liniy BD, bd, a zatym iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca.

176. *Twierdz:* 10. Bryłowatości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, fą do fiebie w ftofunku tróymnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz. Nayprzod: Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB, koła

tak ſię ma do ſwoiey kuli, iak kwadrat linii AB, do kwadratu średnicy AE, albo iak kwadrat linii ab, do kwadratu średnicy ae; to ieſt: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek: acb, koła, do kuli ſwoiey. Więc tenże ſam ieſt ſtoſunek iednego z tych wycinka do ſwoiey kuli, co i drugiego wycinka do ſwoiey także kuli; azatym te wycinki, tak ſię do ſiebie maią, iak i kule do ktòrych należą. Aże ſtoſunek tych kul, ieſt ſtoſunkiem tròymnożnym ich promieni, więc i ſtoſunek tych wycinków ieſt także ſtoſunkiem tròymnożnym tychże promieni.

Powtore. Oſtrokręgi podobne utworzone obrotem Tròykątòw, CBD, cbd, ſą do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni CB, cb; więc tak też maią ſię do ſiebie, iak i wycinki kul utworzone obrotem wycinkòw ACB, acb, do kòł należących; a zatym i ròżnice każdego wycinka kuli, od każdego Oſtrokręgu, to ieſt odcinki kul, utworzone przez pòłodcinki kòł, ABD, abd, ſą do ſiebie w ſtoſunku ròwnym ſtoſunkowi wycinków kul, to ieſt w ſtoſunku tròymnożnym promieni: CB, cb.

177. *Twierdz:* 11. Gdy cztery iakie linie czynią proporcyą, i gdy dwa pierwsze wyrazy tey proporcyi, są liniiami odpowiadaiącemi sobie, czyli podobnie położonemi, w dwóch Bryłach podobnych; a dwa ostatnie wyrazy teyże proporcyi, są liniiami odpowiadaiącemi sobie, w dwòch innych Bryłach podobnych; stosunek dwòch pierwszych Brył, będzie ròwny stosunkowi dwòch bryl drugich.

Dowodz. Gdyby te cztery liniie były bokami czterech Sześcianòw, te cztery Sześciany czyniiyby proporcyą; aże stosunek dwòch pierwszych Brył, ròwna się stosunkowi dwóch pierwszych Sześcianòw, a stosunek dwòh drugich Brył, ròwna się stosunkowi dwòch drugich Sześcianòw; więc i stosunek dwòch pierwszych Brył, ròwna się stosunkowi dwòch Brył drugich.

178. *Uwaga.* Bryłowatości Brył podobnych, prędzey rosną, niż ich powierzchnie.

Przykład. Niech będą liniie odpowiadaiące sobie w dwòch Bryłach podobnych, dwa razy większe iedne względem

dem drugich; powierzchnia iedney z tych Bryły, będzie cztery razy większa od powierzchni drugiey Bryły; a zaś Bryłowatość iedney Bryły, będzie ośm razy większa od bryłowatości, drugiey Bryły.

W ogulności zaś mówiąc, niech będą AB, AC, liniiami odpowiadaiącemi sobie, w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy Tròykąt prostokątny maiący liniią AB, za iedno ramie kąta prostego, a liniią AC, za przeciwprostkątną. *Tab. VI. Fig. 5.*

Pociągniymy CD prostopadłą do AC, i natrafiaiącą na liniią AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą do AD, i natrafiaiącą na liniią AC przedłużoną w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Brył, któreby miały AB, i AC za liniie odpowiadaiące sobie, maią się tak do siebie, iak liniie AB, i AD; a bryłowatości ich, są w tym samym stosunku, w którym liniie AB, i AE.

Aże liniia AE, większa iest względem linii AB, niżeli liniia AD; więc też i bry-

łowatość drugiey Bryły większa iest względem bryłowatości pierwszey Bryły, niżeli powierzchnia tey drugiey Bryły, względem powierzchni pierwszey Bryły; to iest: bryłowatość drugiey Bryły prędzey się powiększa, niżeli iey powierzchnia.

179. *Uwaga.* Na poprzedzaiących Twierdzeniach zasadza się podział *Linii Bryt* (Linea Solidorum) który znayduiemy na cerklu proporcyonalnym.

Ta liniia zawiera w sobie zwyczaynie 64, podziałów, które się rachować zaczynaią od *środka* narzędzia (à centro).

Odległości tego środka od punktów naznaczonych liczbami: 1. 8, 27, 64, tak się maią do siebie, iak

liczby - - 1, 2, 3, 4; co znaczy, że Bryły podobne, których boki są w stosunku liczb: 1, 2, 3, 4, maią bryłowatości w stosunku liczb: 1, 8, 27, 64.

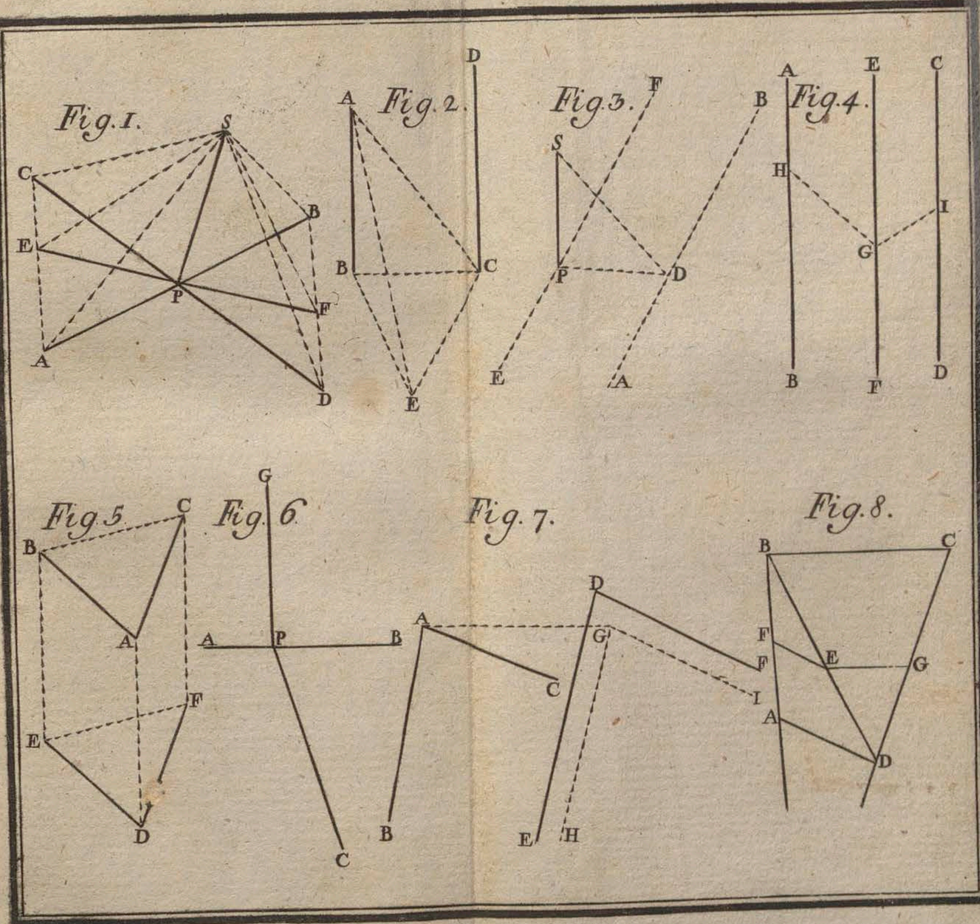
Jnne podziały wyznaczone są przez wyciągnienie przybliżone pierwiastków sześciennych. J tak, ponieważ boki dwòch

dwòch Sześcianòw, z ktòrych ieden dwa razy iest większy od drugiego, tak się blisko maią do siebie,iak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na tey linii liczbami: 1, 2, tak się maią do siebie, iak liczby: 100, i 126. Używanie dwòch takich liniy, znayduiących się na dwoch ramionach cerkla proporcyonalnego, podobne iest używaniu innych liniy tamże się znayduiących, ktòre w osobnym na to Rozdziale iuż się wyłożyło. w Części I.

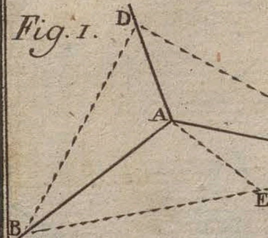
KONIEC.

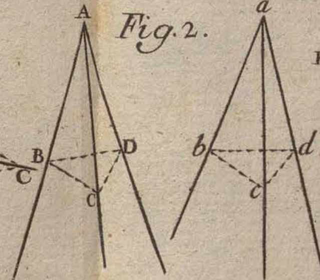


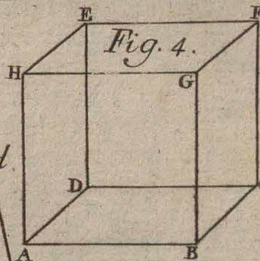
Tab. I.

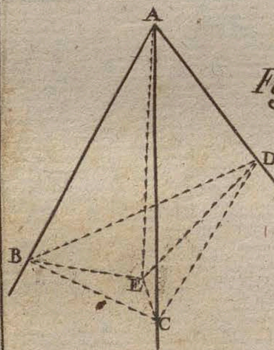

Fig. 1.
S
C
B
E
P
F
A
D
Fig. 2.
A
D
B
C
E
Fig. 3.
F
S
P
D
E
A
B
Fig. 4.
A
E
C
H
I
G
B
F
D
Fig. 5
C
B
A
F
E
D
Fig. 6
G
A
P
B
C
Fig. 7.
D
A
G
F
C
I
B
E
H
Fig. 8.
B
C
F
E
G
A
D

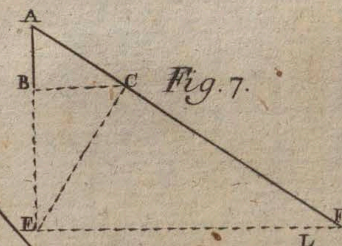
Tab. II.

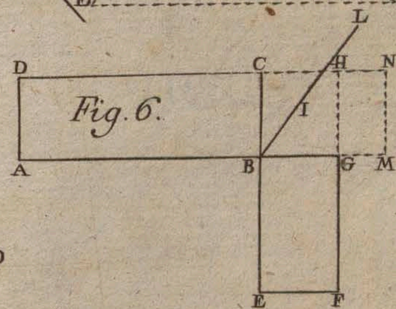

Fig. 1.
D
A
B
E
C

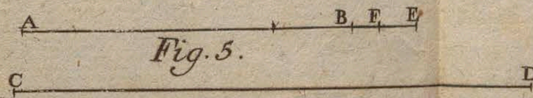

Fig. 2.
A
B
D
C
a
b
d
c


Fig. 4.
E
F
H
G
D
C
A
B


Fig. 3.
A
D
B
E
C
a
b
d
c


Fig. 7.
A
B
C
E
F


Fig. 6.
L
D
C
H
N
I
A
B
G
M
E
F


A
B
F
E
Fig. 5.
C
D

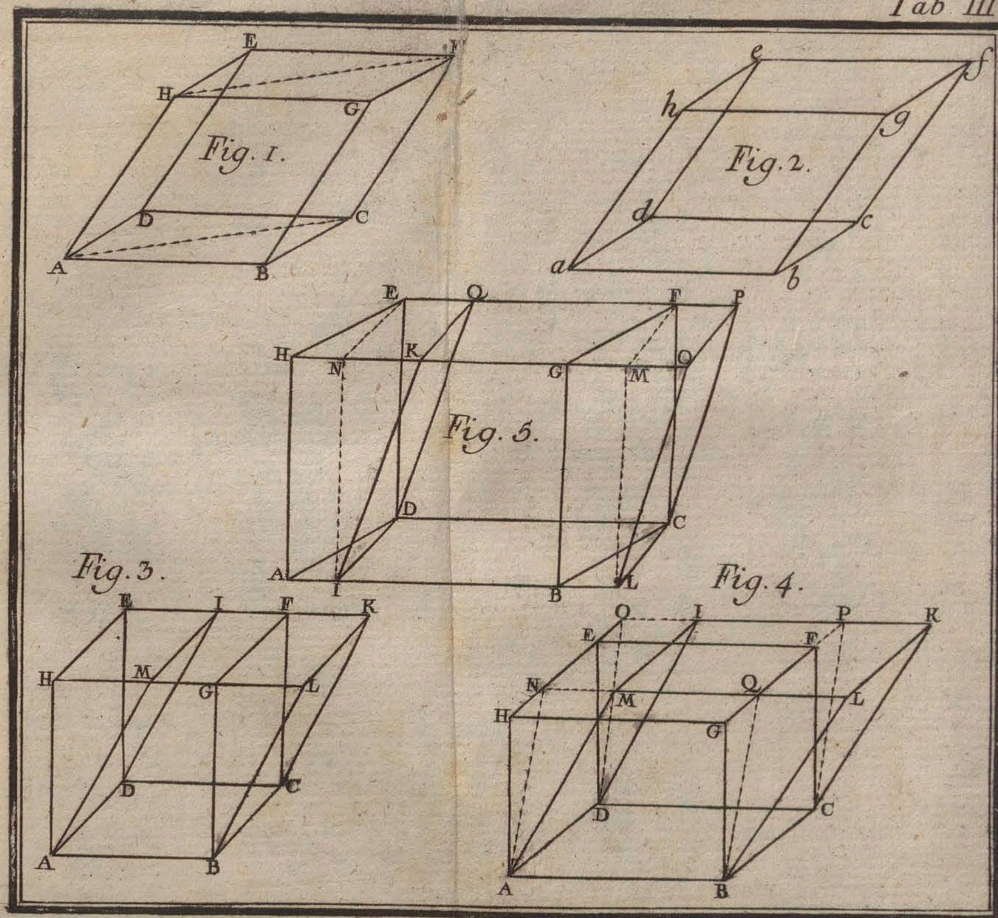
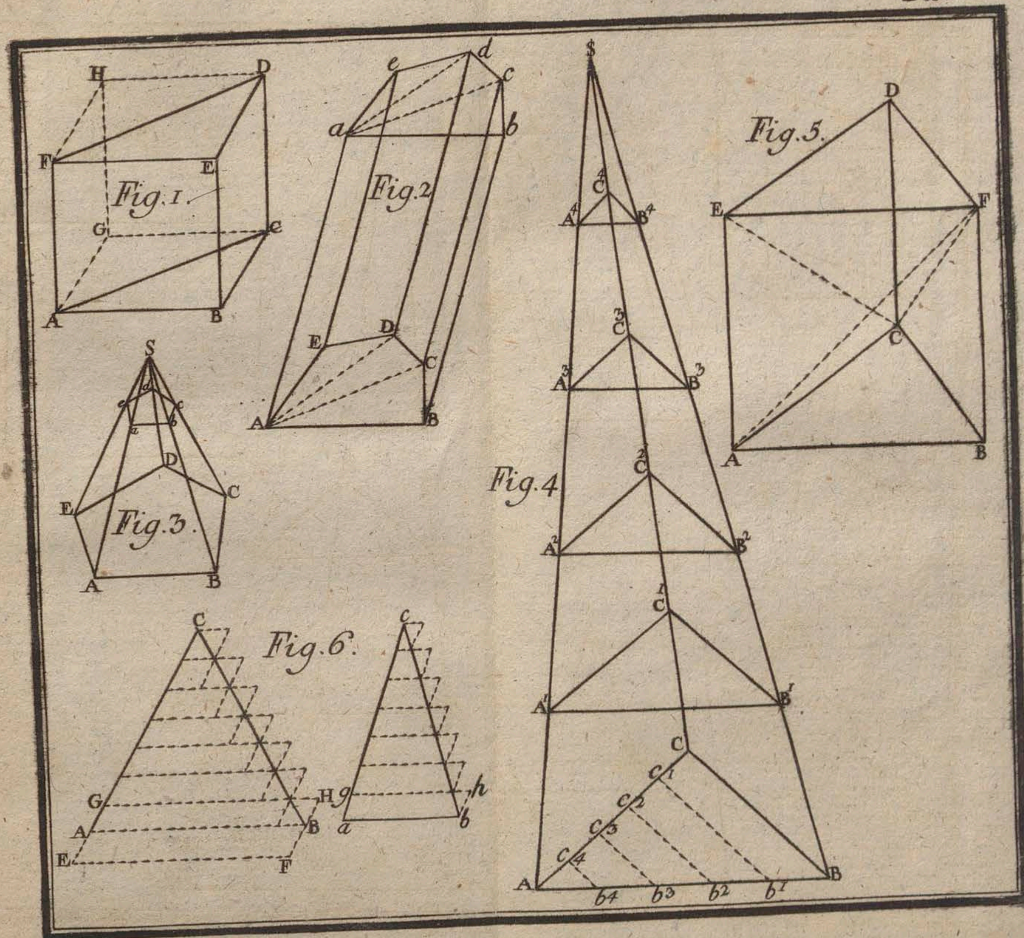


Fig. 1.
E
F
H
G
D
C
A
B
Fig. 2.
e
f
h
g
d
c
a
b
Fig. 5.
E
Q
F
P
H
N
K
G
M
O
D
C
A
I
B
L
Fig. 3.
E
I
F
K
H
M
G
L
D
C
A
B
Fig. 4.
O
I
P
K
E
F
N
M
Q
L
H
G
D
C
A
B


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.


BIBLIOTH: UNIV:
JAGELLONICAE

Tab. V.

Fig 1

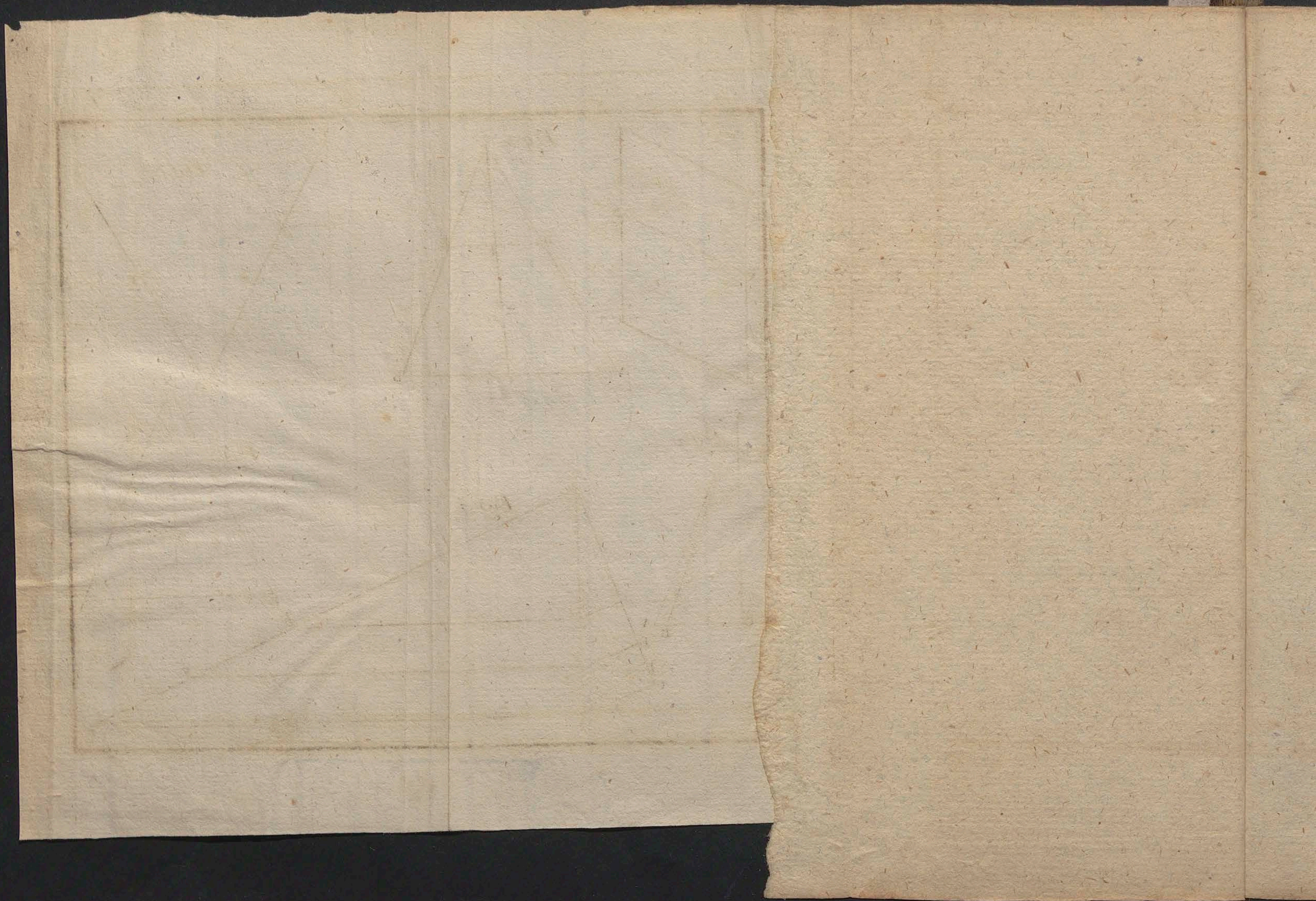
Fig 2.

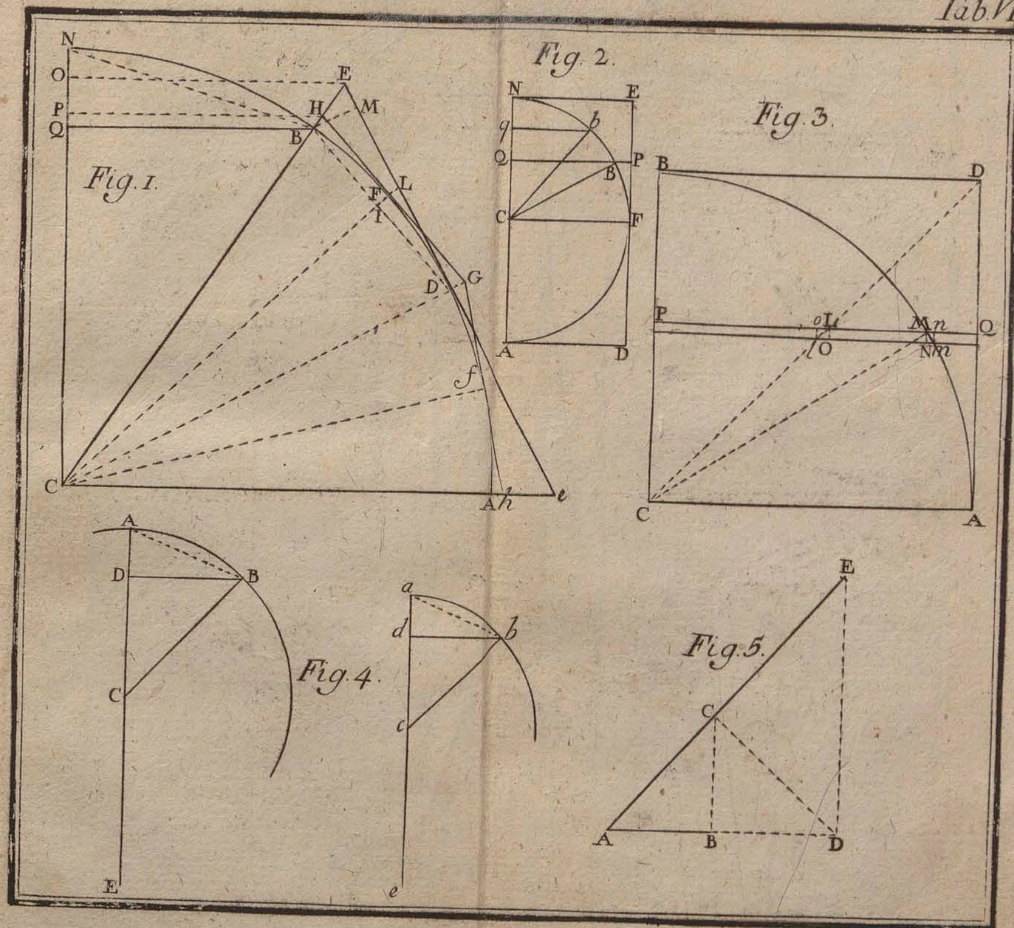
Fig 3.

Fig 4.

Fig 5.

Fig 6.




Fig. 1.
N
O
P
Q
E
H
M
B
F
L
I
D
G
f
C
A
h
e
Fig. 2.
N
E
q
b
Q
P
B
C
F
A
D
Fig. 3.
B
D
P
o
L
l
O
M
n
N
m
Q
C
A
Fig. 4.
A
D
B
C
E
a
d
b
c
e
Fig. 5.
E
C
A
B
D



